

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ – БАКАЛАВРИАТ

серия основана в 1996 г.



Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

М.В. АБАКУМОВ
А.В. ГУЛИН

ЛЕКЦИИ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Допущено УМО
по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлениям
ВПО 010400 «Прикладная математика и информатика»
и 010300 «Фундаментальная информатика
и информационные технологии»*

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

Москва
ИНФРА-М
2013

УДК 519.63(075.8)
ББК 22.193я73
А13

*Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ
им. М.В. Ломоносова*

Рецензенты:
*Костомаров Д.П., академик РАН, профессор
Денисов А.М., профессор*

Абакумов М.В., Гулин А.В.

А13 Лекции по численным методам математической физики:
Учеб. пособие. — М.: ИНФРА-М, 2013. — 158 с. — (Высшее образование: Бакалавриат).

ISBN 978-5-16-006108-5

Пособие отражает содержание лекционного курса «Численные методы математической физики», читаемого студентам факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. Излагаются основы теории разностных схем и метода конечных элементов. Рассматриваются прямые и итерационные методы решения систем разностных уравнений, возникающих при аппроксимации многомерных задач математической физики. Обсуждается применение теории устойчивости к исследованию разностных схем. Приводятся примеры построения, исследования и численной реализации разностных схем для нелинейных задач. Содержится набор упражнений, способствующий активному усвоению излагаемого материала.

Пособие рассчитано на студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области прикладной математики.

ББК 22.193я73

Оглавление

Предисловие	7
1 Метод конечных элементов	9
1.1 Кусочно-линейные восполнения	9
1.1.1 Построение кусочно-линейного восполнения	9
1.1.2 Сходимость кусочно-линейных восполнений	11
1.2 Понятие о методе конечных элементов	13
1.2.1 Общее описание метода	13
1.2.2 Исходная задача и определение приближенного решения	13
1.2.3 Построение приближенного решения	15
1.3 Исследование сходимости МКЭ	16
1.3.1 Существование приближенного решения	16
1.3.2 Свойства приближенного решения	19
1.3.3 Сходимость приближенного решения к точному	21
1.4 МКЭ для уравнения Пуассона	23
1.4.1 Исходная задача	23
1.4.2 Базисные функции	24
1.4.3 Кусочно-линейные восполнения двумерных сеточных функций	25
1.4.4 Построение конечноэлементного решения задачи Дирихле	27
1.5 Задачи к главе 1	28
2 Принцип максимума для разностных схем	32
2.1 Разностная аппроксимация задачи Дирихле для уравнения Пуассона	32
2.2 Принцип максимума	34

2.3	Следствия принципа максимума	36
2.4	Устойчивость и сходимость разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона	38
2.5	Примеры применения принципа максимума	41
2.6	Монотонные разностные схемы для уравнений второго порядка, содержащих первые производные	48
2.7	Задачи к главе 2	50
3	Методы решения сеточных уравнений	53
3.1	Модельная задача	53
3.1.1	Оператор разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике	53
3.1.2	Модельная задача и ее свойства	59
3.2	Оценки скорости сходимости стационарных итерационных методов	59
3.2.1	Скорость сходимости итерационного метода	59
3.2.2	Правила действий с матричными неравенствами	63
3.2.3	Оценки скорости сходимости в случае симметричных матриц A и B	65
3.3	Применение стандартных итерационных методов	69
3.3.1	Метод Якоби	69
3.3.2	Метод Зейделя	70
3.4	Попеременно–треугольный итерационный метод	72
3.4.1	Алгебраическая теория	72
3.4.2	Применение к модельной задаче	75
3.4.3	Попеременно–треугольный метод с чебышевскими итерационными параметрами	78
3.5	Итерационные методы вариационного типа	81
3.5.1	Одношаговые итерационные методы вариационного типа	81
3.5.2	Метод скорейшего спуска	85
3.5.3	Метод минимальных невязок	87
3.5.4	Метод минимальных поправок	87
3.5.5	Метод минимальных погрешностей	88
3.5.6	Двухшаговые итерационные методы вариационного типа	88
3.5.7	Примеры методов сопряженных направлений	90

3.6	Решение разностных уравнений второго порядка методом Фурье	91
3.6.1	Разложение по базису собственных функций	91
3.6.2	Понятие о быстром дискретном преобразовании Фурье	93
3.6.3	Решение разностного уравнения Пуассона методом Фурье	93
3.7	Метод матричной прогонки	95
3.7.1	Запись разностного уравнения Пуассона в виде системы векторных уравнений	95
3.7.2	Алгоритм матричной прогонки	97
3.7.3	Устойчивость матричной прогонки	98
3.8	Метод редукции	101
3.8.1	Вывод основных формул	101
3.8.2	Обращение матриц	103
3.8.3	Вычисление правых частей	104
3.8.4	Формулировка и обсуждение алгоритма	105
3.9	Задачи к главе 3	107
4	Теория устойчивости разностных схем	111
4.1	Разностные схемы как операторные уравнения	111
4.1.1	Представление разностных схем в виде операторных уравнений	111
4.1.2	Корректность операторных уравнений	113
4.1.3	Операторы первой разностной производной	115
4.2	Канонический вид и условия устойчивости двуслойных разностных схем	117
4.2.1	Канонический вид двуслойных разностных схем	117
4.2.2	Устойчивость двуслойных схем	119
4.2.3	Теорема об устойчивости по начальным данным	121
4.2.4	Несамосопряженные разностные схемы	123
4.3	Канонический вид и условия устойчивости трехслойных разностных схем	125
4.4	Экономичные методы решения многомерных нестационарных задач математической физики	129
4.4.1	Недостатки обычных разностных методов	129
4.4.2	Пример метода переменных направлений	132

4.4.3	Абсолютная устойчивость продольно–поперечной схемы	133
4.4.4	Понятие суммарной аппроксимации	134
4.5	Задачи к главе 4	136
5	Разностные схемы для нелинейных задач математической физики	139
5.1	Квазилинейное уравнение теплопроводности	139
5.1.1	Исходное уравнение	139
5.1.2	Автомодельные решения	140
5.2	Разностные схемы для уравнений с переменными коэффициентами и нелинейного уравнения теплопроводности	142
5.2.1	Уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами	142
5.2.2	Нелинейное уравнение теплопроводности	145
5.3	Разностная схема для нелинейного эллиптического уравнения	147
5.3.1	Исходная задача и разностная схема. Линеаризованное уравнение для погрешности	147
5.3.2	Оценка погрешности в равномерной метрике	148
5.3.3	Оценка среднеквадратичной нормы погрешности	149
5.4	Итерационный метод Ньютона	150
5.5	Задачи к главе 5	152

Предисловие



Академик
А.А.Самарский
(1919 - 2008)

В основу настоящего учебного пособия положены идеи и методические разработки академика А.А.Самарского.

Александр Андреевич Самарский был выдающимся математиком, специалистом с мировым именем в области математического моделирования и теории вычислительных методов, одним из основоположников отечественной вычислительной математики. Известная монография «Теория разностных схем» [1] обобщила громадный опыт А.А.Самарского по конструированию и исследованию разностных схем, применению численных методов к решению актуальных задач математической физики. В данном случае можно сказать, что теория целиком выросла из практики, питается конкретными проблемами и нацелена на их

решение. На основе монографии «Теория разностных схем» была написана и в 2000 году опубликована книга «Численные методы математической физики» [2], ориентированная в основном на студентов вузов, специализирующихся в области физики и прикладной математики, и учитывающая особенности учебных планов.

При написании предлагаемого учебного пособия авторы преследовали цель дальнейшего упрощения изложения, сокращения объема книги в соответствии с новыми учебными планами, в частности, с учетом перехода на двухступенчатую систему высшего образования. Авторы постарались справиться с непростой задачей адаптации теории разностных схем к изложению в виде годового учебного курса, предназначенного для студентов-четверокурсников факультета ВМК. Сохранены все разделы книги «Численные методы математической физики», более строго отобраны основные понятия и примеры. В ряде случаев проведены более четкие доказательства. Курс содержит такие разделы теории разностных методов как построение и исследование корректности и сходимости разностных схем для типичных задач математической физики, компьютерно-ориентированные методы решения соответствующих сеточных уравнений, вводные понятия метода конечных элементов. Курс прошел серьезную апробацию, в течение многих лет он излагался как обязательный курс для студентов математического потока факультета ВМК и студентам Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова. Считаем, что данное учебное пособие окажется полезным

для студентов и преподавателей, интересующихся современными методами численного решения задач математической физики.

Авторы выражают огромную благодарность своим коллегам: В.Б. Андрееву, Е.С. Николаеву и Н.В. Соснину, чьи методические материалы были использованы при подготовке настоящего пособия. Авторы благодарят рецензентов: академика Д.П. Костомарова и профессора А.М. Денисова, за внимательное прочтение работы и критические замечания, которые были учтены при подготовке данного издания.

М.В. Абакумов, А.В. Гулин

Глава 1

Метод конечных элементов

1.1 Кусочно-линейные восполнения

1.1.1 Построение кусочно-линейного восполнения

Рассмотрим функцию $u(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$. Введем на отрезке $[a, b]$ разностную сетку:

$$\Omega_h = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\};$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$u_i = u(x_i); \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

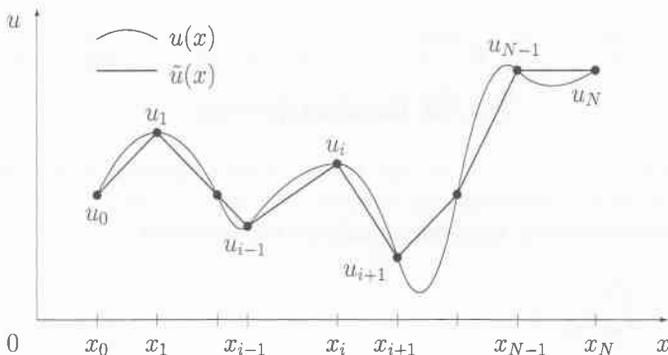


Рис. 1.1. Кусочно-линейное восполнение

Построим на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ по значениям u_{i-1}, u_i интерполяционный многочлен Лагранжа 1-ой степени:

$$L_1^{(i)}(x) = u_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Определение. Кусочно-линейным восполнением функции $u(x)$ на сетке Ω_h называется функция $\tilde{u}(x) = L_1^{(i)}(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, \dots, N$.

Замечание. Кусочно-линейное восполнение $\tilde{u}(x)$ представляет собой интерполяционный сплайн первой степени, является непрерывной функцией на $[a, b]$. Производная $\tilde{u}'(x)$ кусочно постоянна и может не существовать в узлах x_i (см. рис.1.1).

Далее введем в рассмотрение базисные функции (см. рис.1.2):

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]; \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_1}, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0, & x \notin [x_0, x_1]; \end{cases} \quad \varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in [x_{N-1}, x_N]; \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, x_N]. \end{cases}$$

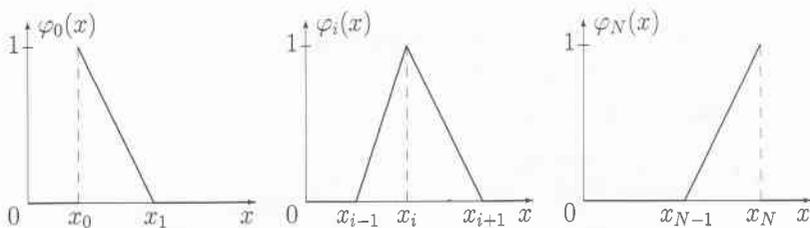


Рис. 1.2. Базисные функции

Учитывая, что $\varphi_i(x_k) = \delta_{ik}$, где δ_{ik} — символ Кронекера, а также линейность базисных функций на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, \dots, N$; получим представление кусочно-линейного восполнения

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_i(x)$$

в виде линейной комбинации функций $\varphi_i(x)$, поскольку такая комбинация является линейной функцией на каждом интервале сетки Ω_h и удовлетворяет условиям $\tilde{u}(x_i) = u_i$.

1.1.2 Сходимость кусочно-линейных восполнений

Лемма 1.1. Пусть функция $u(x)$ непрерывна на $[a, b]$, имеет на (a, b) вторую производную, и $\int_a^b (u''(x))^2 dx < \infty$, тогда

$$\int_a^b (\tilde{u}'(x) - u'(x))^2 dx \leq h^2 \int_a^b (u''(x))^2 dx, \text{ где } h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i.$$

▼ Доказательство. Пусть $x \in (x_{i-1}, x_i)$, тогда

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(x) - u'(x) &= \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} - u'(x) = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u'(s) - u'(x)) ds = \\ &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} ds \int_x^s u''(t) dt \Rightarrow |\tilde{u}'(x) - u'(x)| \leq \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} ds \int_x^s |u''(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} ds \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(t)| dt = \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(t)| dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\tilde{u}'(x) - u'(x))^2 dx \leq h_i \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(t)| dt \right)^2 \leq \end{aligned}$$

(используя неравенство Коши-Буняковского)

$$\begin{aligned} &\leq h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^2 dt \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(t))^2 dt = h_i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(t))^2 dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_a^b (\tilde{u}'(x) - u'(x))^2 dx \leq \sum_{i=1}^N h_i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(x))^2 dx \leq h^2 \int_a^b (u''(x))^2 dx. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Лемма 1.2. При условиях Леммы 1.1 справедливо неравенство

$$\int_a^b (\tilde{u}(x) - u(x))^2 dx \leq h^4 \int_a^b (u''(x))^2 dx.$$

▼ Доказательство. Пусть $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Поскольку $\tilde{u}(x_{i-1}) = u(x_{i-1})$ верно равенство

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) - u(x) &= \int_{x_{i-1}}^x (\tilde{u}'(s) - u'(s)) ds \Rightarrow \\ \Rightarrow |\tilde{u}(x) - u(x)| &\leq \int_{x_{i-1}}^x |\tilde{u}'(s) - u'(s)| ds \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\tilde{u}'(s) - u'(s)| ds \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\tilde{u}(x) - u(x))^2 dx &\leq h_i \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\tilde{u}'(s) - u'(s)| ds \right)^2 \leq \end{aligned}$$

(используя неравенство Коши-Буняковского)

$$\begin{aligned} &\leq h_i^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\tilde{u}'(s) - u'(s))^2 ds \leq (\text{Лемма 1.1}) \leq h_i^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(s))^2 ds \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b (\tilde{u}(x) - u(x))^2 dx &\leq \sum_{i=1}^N h_i^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u''(x))^2 dx \leq h^4 \int_a^b (u''(x))^2 dx. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Получены оценки в норме $\|v(x)\|_{L_2(a,b)} = \left(\int_a^b v^2(x) dx \right)^{1/2}$ пространства $L_2(a, b)$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(x) - u(x)\|_{L_2(a,b)} &\leq h^2 \|u''(x)\|_{L_2(a,b)}, \\ \|\tilde{u}'(x) - u'(x)\|_{L_2(a,b)} &\leq h \|u''(x)\|_{L_2(a,b)}. \end{aligned}$$

Следствие (Сходимость в $L_2(a, b)$). При условиях Леммы 1.1

$$\|\tilde{u}(x) - u(x)\|_{L_2(a,b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad \|\tilde{u}'(x) - u'(x)\|_{L_2(a,b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad (h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i).$$

Замечание. Можно также получить оценку (см. [2]), означающую сходимость в норме $C[a, b]$:

$$\max_{x \in [a,b]} |\tilde{u}(x) - u(x)| \leq h^{3/2} \|u''(x)\|_{L_2(a,b)} \Rightarrow \|\tilde{u}(x) - u(x)\|_{C[a,b]} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

1.2 Понятие о методе конечных элементов

1.2.1 Общее описание метода

В общих чертах метод конечных элементов состоит в следующем.

1) Исходная задача рассматривается как операторное уравнение

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in G, \quad u(x) \in H.$$

Здесь H — бесконечномерное функциональное пространство, в котором, как правило, ищется обобщенное решение, L — линейный оператор, действующий в H , G — некоторая область, в которой определены функции $u(x)$ и $f(x)$. Будем предполагать, что для функций $u, v \in H$ определено скалярное произведение (u, v) .

2) Область G разбивается на непересекающиеся элементы $\{G_k\}_{k=1}^M$. Вводится конечноэлементный базис $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$, состоящий из функций, отличных от нуля лишь на нескольких элементах. Такие функции называют финитными или функциями с конечным носителем. Линейная оболочка $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ порождает конечномерное подпространство H_N пространства H , в котором ищется приближенное решение $u_N(x)$.

3) Приближенное решение ищется в виде $u_N(x) = \sum_{j=1}^N y_j \varphi_j(x)$. Подставляя это представление в операторное уравнение и умножая скалярно обе его части на функции φ_i , приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения y_j :

$$Ay = b, \quad y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N)^T, \quad b = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N)^T, \quad A = [a_{ij}]; \\ a_{ij} = (L\varphi_j, \varphi_i), \quad b_i = (f, \varphi_i); \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

В силу финитности базиса большинство коэффициентов a_{ij} обращаются в нуль, то есть система имеет разреженную матрицу A .

Замечание. Сходимость приближенного решения к точному означает, что в некоторой норме $\|u_N(x) - u(x)\|_H \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

1.2.2 Исходная задача и определение приближенного решения

Метод конечных элементов изложим на примере задачи

$$\begin{cases} u''(x) - q(x)u(x) = -f(x), & 0 < x < 1; \\ u(0) = u(1) = 0, & (q(x) \geq 0). \end{cases} \quad (1.1)$$

Определение. Классическим решением задачи (1.1) называется непрерывная на $[0, 1]$ и дважды непрерывно дифференцируемая на $(0, 1)$ функция, удовлетворяющая уравнению при $x \in (0, 1)$ и граничным условиям.

Далее будем использовать обозначение $\overset{0}{C}^1[0, 1]$ для пространства функций, непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ и обращающихся в нуль при $x = 0$ и $x = 1$.

Определение. Пространством Соболева $\overset{0}{W}_2^1(0, 1)$ называется пополнение пространства $\overset{0}{C}^1[0, 1]$ по норме

$$\|v\|_{\overset{0}{W}_2^1(0,1)} = \left(\int_0^1 [v^2(x) + (v'(x))^2] dx \right)^{1/2}.$$

Замечание. Для классического решения $u(x)$ задачи (1.1) и произвольной функции $v(x) \in \overset{0}{C}^1[0, 1]$ справедливо интегральное тождество

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad (1.2)$$

которое проверяется интегрированием по частям.

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1) называется функция $u(x) \in \overset{0}{W}_2^1(0, 1)$, удовлетворяющая равенству (1.2) при всех $v(x) \in \overset{0}{W}_2^1(0, 1)$.

Введем на отрезке $[0, 1]$ разностную сетку (тем самым разобьем его на элементы — интервалы сетки):

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1\}; \\ h_i &= x_i - x_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Определим функции конечноэлементного базиса следующим образом:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]; \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Поскольку $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$, линейная оболочка базисных функций определяет конечномерное подпространство $H_N \in \overset{0}{W}_2^1(0, 1)$, $\dim H_N = N - 1$.

Определение. Приближенным решением задачи (1.1) называется функция $u_N(x) \in H_N$, удовлетворяющая равенству (1.2) при всех $v(x) \in H_N$.

1.2.3 Построение приближенного решения

Замечание. Выполнение равенства (1.2) для всех $v(x) \in H_N$ эквивалентно выполнению (1.2) для всех $\varphi_i(x)$, то есть приближенное решение $u_N(x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'_N \varphi'_i dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q u_N \varphi_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx; \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.3)$$

Для нахождения $u_N(x) \in H_N$ достаточно найти коэффициенты разложения

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \varphi_i(x).$$

Далее приведем выражения для интегралов, входящих в уравнения системы (1.3). Для этого заметим, что с учетом финитности $\varphi_i(x)$

$$u_N(x) = y_{i-1} \varphi_{i-1}(x) + y_i \varphi_i(x) + y_{i+1} \varphi_{i+1}(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

Чтобы выражение в правой части было определено при всех $i = 1, \dots, N-1$, достаточно положить $y_0 = y_N = 0$. Учитывая, что

$$\forall x \in (x_{i-1}, x_i) \quad u'_N(x) = y_{i-1} \varphi'_{i-1}(x) + y_i \varphi'_i(x) = -\frac{y_{i-1}}{h_i} + \frac{y_i}{h_i} = y_{\bar{x},i},$$

$$\forall x \in (x_i, x_{i+1}) \quad u'_N(x) = y_i \varphi'_i(x) + y_{i+1} \varphi'_{i+1}(x) = -\frac{y_i}{h_{i+1}} + \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} = y_{x,i},$$

первый из интегралов (1.3) примет вид

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'_N \varphi'_i dx = y_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{h_i} - y_{x,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{h_{i+1}} = y_{\bar{x},i} - y_{x,i}.$$

Обозначая

$$l_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} q \varphi_{i-1} \varphi_i dx, \quad m_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q \varphi_i^2 dx, \quad n_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q \varphi_i \varphi_{i+1} dx,$$

для второго из интегралов (1.3) получим представление

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q u_N \varphi_i dx = l_i y_{i-1} + m_i y_i + n_i y_{i+1}.$$

Вводя обозначение $F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx$, получим, что коэффициенты приближенного решения y_i удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{cases} y_{\bar{x},i} - y_{x,i} + l_i y_{i-1} + m_i y_i + n_i y_{i+1} = F_i; & i = 1, 2, \dots, N-1; \\ y_0 = y_N = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Матрица системы (1.4) является симметричной и трехдиагональной. Далее будет доказана ее положительная определенность при условии $q(x) \geq 0$. Тем самым система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом прогонки.

Замечание. Система (1.4) представляет собой некоторую разностную схему, аппроксимирующую задачу (1.1).

Алгоритм построения приближенного конечноэлементного решения задачи (1.1) состоит из следующих этапов:

1) Узлами сетки Ω_h отрезок $[0,1]$ разбивается на элементы $e_i = [x_{i-1}, x_i]$; $i = 1, 2, \dots, N$.

2) Вводится конечноэлементный базис $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N-1}$, где $\varphi_i(x)$ отличны от нуля лишь на e_i и e_{i+1} .

3) Вычисляются коэффициенты l_i, m_i, n_i и правая часть F_i , как правило, каким-либо методом численного интегрирования.

4) Решается система линейных алгебраических уравнений (1.4) и находятся коэффициенты y_1, y_2, \dots, y_{N-1} .

5) Приближенное решение $u_N(x)$ строится в виде кусочно-линейного восполнения на сетке Ω_h по значениям y_1, y_2, \dots, y_{N-1} .

1.3 Исследование сходимости МКЭ

1.3.1 Существование приближенного решения

Введем для функций $v, w \in \overset{0}{W}_2^1(0, 1)$ скалярное произведение

$$(v, w) = \int_0^1 v(x)w(x)dx$$

и симметричный билинейный функционал

$$a(v, w) = \int_0^1 [v'w' + qvw] dx.$$

Дадим определения обобщенного и приближенного решения, эквивалентные предыдущим.

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1) называется функция $u(x) \in \overset{0}{W}_2^1(0, 1)$, удовлетворяющая равенству $a(u, v) = (f, v)$ для произвольной функции $v(x) \in \overset{0}{W}_2^1(0, 1)$.

Определение. Приближенным решением задачи (1.1) называется функция $u_N(x) \in H_N$, удовлетворяющая равенству $a(u_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i)$ для каждого $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

Пусть, как и ранее, y_i — коэффициенты разложения $u_N(x)$ по базису $\{\varphi_i(x)\}$, то есть

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \varphi_i(x).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \hat{y} &= (y_1 y_2 \cdots y_{N-1})^T, \\ \hat{f} &= (f_1 f_2 \cdots f_{N-1})^T, \quad f_i = (f, \varphi_i), \\ A &= [a_{ij}], \quad a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Лемма 1.3. Коэффициенты y_i удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений $A\hat{y} = \hat{f}$.

▼ Доказательство.

$$\begin{aligned} f_i &= (f, \varphi_i) = a(u_N, \varphi_i) = a\left(\sum_{j=1}^{N-1} y_j \varphi_j, \varphi_i\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} y_j a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{N-1} a_{ij} y_j = (A\hat{y})_i. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Следствие. Существование и единственность приближенного решения $u_N(x)$ равносильны существованию и единственности решения системы линейных алгебраических уравнений $A\hat{y} = \hat{f}$.

Обозначим через \hat{H} пространство векторов $\hat{v} = (v_1 v_2 \cdots v_{N-1})^T$ размерности $(N - 1)$ со скалярным произведением $(\hat{v}, \hat{w})_{\hat{H}} = \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i$.

Лемма 1.4. Для произвольного вектора $\hat{v} = (v_1 v_2 \dots v_{N-1})^T \in \hat{H}$ и функции $v(x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i(x) \in H_N$ справедливо равенство $a(v, v) = (A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}}$.

▼ Доказательство.

$$\begin{aligned} a(v, v) &= a\left(\sum_{j=1}^{N-1} v_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i\right) = \sum_{i,j=1}^{N-1} v_i v_j a(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_{i,j=1}^{N-1} a_{ij} v_i v_j = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} (A\hat{v})_i v_i = (A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}}. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Лемма 1.5. Матрица A симметрична и при $q(x) \geq 0$ положительно определена.

▼ Доказательство.

1) $a_{ji} = a(\varphi_i, \varphi_j) = a(\varphi_j, \varphi_i) = a_{ij} \Rightarrow A^T = A$.

2) Для произвольного вектора $\hat{v} \in \hat{H}$

$$(A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}} = \int_0^1 (v'(x))^2 dx + \int_0^1 q(x) v^2(x) dx \geq 0 \quad (q(x) \geq 0).$$

Пусть $(A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}} = 0$, тогда

$$\int_0^1 (v'(x))^2 dx = 0 \Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} (v'(x))^2 dx = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Поскольку

$$v(x) = \begin{cases} v_1 \varphi_1(x), & x \in (0, x_1); \\ v_{i-1} \varphi_{i-1}(x) + v_i \varphi_i(x), & x \in (x_{i-1}, x_i); \\ v_{N-1} \varphi_{N-1}(x), & x \in (x_{N-1}, 1); \end{cases} \Rightarrow$$

$$v'(x) = \begin{cases} v_1/h_1, & x \in (0, x_1); \\ (v_i - v_{i-1})/h_i, & x \in (x_{i-1}, x_i); \\ -v_{N-1}/h_N, & x \in (x_{N-1}, 1); \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, N-1;$$

получим, что $v_1 = 0$, $v_i = v_{i-1}$ при $i = 2, 3, \dots, N-1$, а значит $\hat{v} = 0$. Тем самым $(A\hat{v}, \hat{v})_{\hat{H}} > 0$ для всех $\hat{v} \neq 0$, то есть $A > 0$.

▲ Утверждение доказано.

Теорема 1.1. *Приближенное решение $u_N(x)$ задачи (1.1) существует и единственно.*

▼ Доказательство.

Согласно следствию леммы 1.3 существование и единственность приближенного решения равносильны существованию единственного решения системы линейных алгебраических уравнений $A\hat{y} = \hat{f}$ с квадратной матрицей A , которая в силу леммы 1.5 положительно определена. Это гарантирует существование обратной матрицы, а значит и существование единственного решения системы.

▲ Утверждение доказано.

1.3.2 Свойства приближенного решения

Введем в пространстве $\overset{0}{W}_2^1(0, 1)$ функционал

$$J(v) = a(v, v) - 2(f, v).$$

Далее для краткости будем обозначать пространство $\overset{0}{W}_2^1(0, 1)$ символом H .

Лемма 1.6. *Пусть заданный в H билинейный функционал удовлетворяет условиям $a(u, v) = a(v, u)$, $a(v, v) \geq 0$ при всех $u, v \in H$. Тогда вариационная задача: найти функцию $u \in H$ такую, что $a(u, v) = (f, v)$ для всех $v \in H$; эквивалентна задаче минимизации: найти функцию $u \in H$ такую, что $J(u) = \min_{w \in H} J(w)$.*

▼ Доказательство. 1) Пусть u — решение задачи минимизации, $w = u + tv$, где t — вещественная переменная, v — произвольная функция из H . Тогда $J(w) = a(u + tv, u + tv) - 2(f, u + tv)$, откуда

$$J(w) = J(u) + 2t[a(u, v) - (f, v)] + t^2 a(v, v). \quad (*)$$

Рассмотрим функцию $g(t) = J(u + tv)$. Поскольку $J(u) \leq J(w) \forall w \in H$ минимум этой функции достигается при $t = 0$. Тогда в силу необходимого условия экстремума

$$g'(0) = 2[a(u, v) - (f, v)] + 2ta(v, v)|_{t=0} = 0,$$

откуда $a(u, v) = (f, v)$, и u — решение вариационной задачи в силу произвольности v .

2) Пусть u — решение вариационной задачи. Тогда для произвольной функции $v \in H$ из равенства (*) при $t = 1$ получим

$$J(w) = J(u + v) = J(u) + 2[a(u, v) - (f, v)] + a(v, v) =$$

$$= J(u) + a(v, v) \geq J(u), \text{ т.к. } a(v, v) \geq 0.$$

В силу произвольности v неравенство $J(u + v) \geq J(u)$ означает, что u — решение задачи минимизации

▲ Утверждение доказано.

Следствие. *Обобщенное решение $u(x)$ задачи (1.1) доставляет минимум функционалу $J(v)$ в пространстве $W_2^0(0, 1)$.*

Замечание. При доказательстве леммы 1.6 конкретный вид пространства H , билинейного функционала $a(u, v)$ и скалярного произведения (f, v) не использовался.

Теорема 1.2. *Приближенное решение $u_N(x)$ задачи (1.1) доставляет минимум функционалу $J(v)$ в пространстве H_N .*

▼ Доказательство. Полностью повторяет пункт 2 доказательства леммы 1.6, если считать, что $H \equiv H_N$, учесть свойства введенного ранее билинейного функционала $a(u, v)$, а также то, что $a(u_N, v) = (f, v) \forall v \in H_N$.

▲ Утверждение доказано.

Лемма 1.7. *Пусть $u(x)$ — точное решение задачи (1.1), $u_N(x)$ — ее приближенное решение. Тогда $a(u_N - u, u_N - u) \leq a(v - u, v - u)$ для любых $v \in H_N$.*

▼ Доказательство.

Поскольку $H_N \subset W_2^0(0, 1)$, то $a(u, v) = (f, v) \forall v \in H_N$. Тогда

$$\begin{aligned} a(v - u, v - u) &= a(v, v) - 2a(u, v) + a(u, u) = \\ &= a(v, v) - 2(f, v) + a(u, u) = J(v) + a(u, u). \end{aligned}$$

Отсюда $J(v) = a(v - u, v - u) - a(u, u)$. Полагая здесь $v = u_N$, получим, что $J(u_N) = a(u_N - u, u_N - u) - a(u, u)$. Согласно теореме 1.2 $J(u_N) \leq J(v) \forall v \in H_N$, откуда $a(u_N - u, u_N - u) \leq a(v - u, v - u)$.

▲ Утверждение доказано.

Следствие. *Приближенное решение $u_N(x)$ задачи (1.1) является элементом наилучшего приближения к ее точному решению $u(x)$ в пространстве H_N с нормировкой*

$$\|v\| = \sqrt{a(v, v)} = \left(\int_0^1 [(v'(x))^2 + q(x)v^2(x)] dx \right)^{1/2} \quad (q(x) \geq 0).$$

1.3.3 Сходимость приближенного решения к точному

Лемма 1.8. Пусть $v(x) \in \overset{0}{W}_{\frac{1}{2}}(0,1)$ и $q(x) \geq 0$. Тогда

$$\max_{x \in [0,1]} |v(x)| \leq \left(\int_0^1 (v'(x))^2 dx \right)^{1/2}, \quad \int_0^1 v^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 dx,$$

$$\|v\|_{\overset{0}{W}_{\frac{1}{2}}(0,1)}^2 \leq \frac{3}{2} a(v, v).$$

▼ Доказательство. Учитывая, что $v(0) = 0$, и используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$v^2(x) = \left(\int_0^x v'(s) ds \right)^2 \leq \int_0^x 1 ds \int_0^x (v'(s))^2 ds \leq x \int_0^1 (v'(s))^2 ds,$$

откуда следует первое неравенство из формулировки. Интегрируя по $[0, 1]$, получим второе неравенство:

$$\int_0^1 v^2(x) dx \leq \int_0^1 (v'(s))^2 ds \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 dx.$$

Далее, при $q(x) \geq 0$, с учетом второго неравенства получим

$$a(v, v) = \int_0^1 (v')^2 + qv^2 dx \geq \int_0^1 (v')^2 dx \geq 2 \int_0^1 v^2 dx.$$

Отсюда получим третье неравенство

$$a(v, v) = \frac{2}{3} a(v, v) + \frac{1}{3} a(v, v) \geq \frac{2}{3} \int_0^1 (v')^2 dx + \frac{2}{3} \int_0^1 v^2 dx = \frac{2}{3} \|v\|_{\overset{0}{W}_{\frac{1}{2}}(0,1)}^2.$$

▲ Утверждение доказано.

Напомним, что для построения приближенного решения задачи (1.1) использовалась сетка $\Omega_h = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1\}$ с шагами $h_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1, 2, \dots, N$. Далее наряду с приближенным решением $u_N(x)$ будем рассматривать кусочно-линейное восполнение $\tilde{u}(x)$ точного решения $u(x)$ этой задачи на сетке Ω_h . Наша цель показать, что в некоторой норме $\|u_N - u\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, где $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$.

Замечание. Доказательство сходимости проведем при усиленных требованиях гладкости точного решения $u(x)$.

Определение. Пространством Соболева $\overset{0}{W}_2^2(0, 1)$ называется пополнение пространства дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций, обращающихся в нуль при $x = 0$ и $x = 1$, по норме

$$\|v\|_{\overset{0}{W}_2^2(0,1)} = \left(\int_0^1 [v^2(x) + (v'(x))^2 + (v''(x))^2] dx \right)^{1/2}.$$

Теорема 1.3 (Сходимость в норме $\overset{0}{W}_2^1(0, 1)$). Пусть $u(x) \in \overset{0}{W}_2^2(0, 1)$ — точное решение задачи (1.1), а $u_N(x)$ — ее приближенное решение. Тогда, если $0 \leq q(x) \leq c$, то найдется постоянная M , не зависящая от h , такая, что $\|u - u_N\|_{\overset{0}{W}_2^1(0,1)} \leq Mh$, где $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$.

▼ Доказательство. Согласно лемме 1.7 справедливо неравенство

$$a(u_N - u, u_N - u) \leq a(v - u, v - u) \quad \forall v \in H_N.$$

Поскольку кусочно-линейное восполнение \tilde{u} точного решения u на сетке Ω_h также принадлежит H_N , с учетом оценок лемм 1.1, 1.2 получим

$$\begin{aligned} a(u_N - u, u_N - u) &\leq a(\tilde{u} - u, \tilde{u} - u) = \\ &= \int_0^1 (\tilde{u}' - u')^2 dx + \int_0^1 q(\tilde{u} - u)^2 dx \leq h^2(1 + ch^2) \int_0^1 (u'')^2 dx. \end{aligned}$$

Учитывая последнее неравенство леммы 1.8, получим

$$\|u_N - u\|_{\overset{0}{W}_2^1(0,1)}^2 \leq \frac{3}{2} a(u_N - u, u_N - u) \leq M^2 h^2,$$

где $M = \left(\frac{3}{2}(1 + c) \int_0^1 (u'')^2 dx \right)^{1/2}$, поскольку $h \leq 1$.

▲ Утверждение доказано.

Следствие (Равномерная сходимость). При выполнении условий предыдущей теоремы $\|u_N - u\|_{C[0,1]} \leq Mh$.

▼ Доказательство. Учитывая первое неравенство леммы 1.8

$$\max_{x \in [0,1]} |u_N - u| \leq \left(\int_0^1 (u'_N(x) - u')^2 dx \right)^{1/2} \leq \|u - u_N\|_{\overset{0}{W}_2^1(0,1)} \leq Mh.$$

▲ Утверждение доказано.

1.4 МКЭ для уравнения Пуассона

1.4.1 Исходная задача

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона с однородными граничными условиями в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$, границу которого будем обозначать ∂G :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x), & x = (x_1, x_2) \in G; \\ u(x) = 0, & x \in \partial G. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа.

Определение. Пространством Соболева $\overset{0}{W}_2^1(G)$ будем называть пространство функций, имеющих квадратично интегрируемые в G первые производные, обращающихся в нуль на ∂G , с нормой

$$\|v\|_{\overset{0}{W}_2^1(G)} = \left(\int_G \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 + v^2 \right] dx_1 dx_2 \right)^{1/2}.$$

Замечание. Пространство $\overset{0}{W}_2^1(G)$ также можно ввести как пополнение соответствующего множества гладких функций по указанной норме.

Введем в $\overset{0}{W}_2^1(G)$ скалярное произведение и билинейный функционал:

$$(v, w) = \int_G v(x_1, x_2) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

$$a(v, w) = \int_G \left[\frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2.$$

Определение. Функция $u \in \overset{0}{W}_2^1(G)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле (1.5), если $a(u, v) = (f, v) \forall v \in \overset{0}{W}_2^1(G)$.

Теорема 1.4. Обобщенное решение доставляет минимум в пространстве $\overset{0}{W}_2^1(G)$ функционалу

$$J(v) = a(v, v) - 2(f, v) = \int_G \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)^2 - 2fv \right] dx_1 dx_2.$$

▼ Доказательство. Полностью повторяет пункт 2 доказательства леммы 1.6, если считать, что $H \equiv W_2^0(G)$, а также учесть свойства билинейного функционала $a(u, v)$ и определение обобщенного решения.

▲ Утверждение доказано.

1.4.2 Базисные функции

Введем в области $\bar{G} = G + \partial G$ прямоугольную сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= (x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2; \quad h_1 N_1 = l_1, \quad h_2 N_2 = l_2; \\ \omega_h &= \{x_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}; \\ \gamma_h &= \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1 j}; \quad i = 0, 1, \dots, N_1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}. \end{aligned}$$

Здесь ω_h — множество внутренних узлов сетки, γ_h — множество граничных узлов, содержащее вершины прямоугольника G .

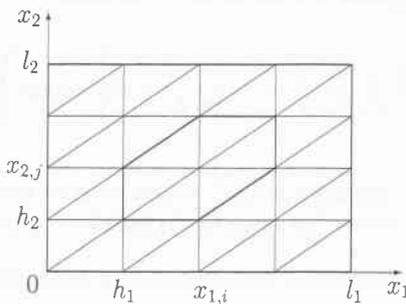


Рис. 1.3. Триангуляция прямоугольника \bar{G}

Разбив каждую ячейку сетки Ω_h на два треугольника, введем триангуляцию прямоугольника \bar{G} , то есть разбиение \bar{G} на множество непересекающихся треугольников (см. рис.1.3).

Каждому внутреннему узлу $x_{ij} \in \omega_h$ поставим в соответствие базисную функцию $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$, определяемую следующими условиями. Функция $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ является линейной в каждом треугольнике триангуляции, $\varphi_{ij}(x_{1,i}, x_{2,j}) = 1$, $\varphi_{ij}(x_{1,k}, x_{2,i}) = 0$ во всех узлах $x_{kl} \in \Omega_h$, отличных от узла x_{ij} .

Из определения следует, что носителем функции $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$, то есть множеством точек, в которых $\varphi_{ij}(x_1, x_2) \neq 0$, является шестиугольник ω_{ij} , образованный треугольниками с общей вершиной x_{ij} . Введем локальную нумерацию этих треугольников (см. рис.1.4) и будем обозначать их символами $G_{ij}^{(1)}, G_{ij}^{(2)}, \dots, G_{ij}^{(6)}$.

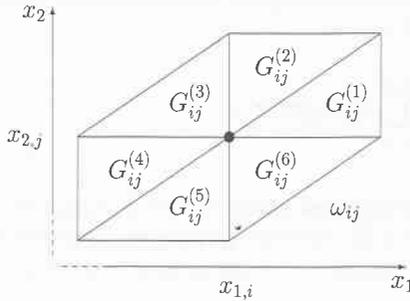


Рис. 1.4. Шестиугольник ω_{ij} — носитель функции $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$

Лемма 1.9. Для базисных функций φ_{ij} на носителе ω_{ij} справедливо представление:

$$\varphi_{ij}(x_1, x_2) = 1 + \xi_1^{(k)} \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1} + \xi_2^{(k)} \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}, \quad (x_1, x_2) \in G_{ij}^{(k)};$$

$$\xi_1^{(k)} = \begin{cases} -1, & k = 1, 6; \\ 0, & k = 2, 5; \\ 1, & k = 3, 4; \end{cases} \quad \xi_2^{(k)} = \begin{cases} -1, & k = 2, 3; \\ 0, & k = 1, 4; \\ 1, & k = 5, 6. \end{cases}$$

▼ Доказательство. Рассмотрим треугольник $G_{ij}^{(1)}$ (для остальных треугольников доказательство аналогично). В силу линейности представления достаточно проверить выполнения равенств:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(x_{1,i}, x_{2,j}) &= 1, \\ \varphi_{ij}(x_{1,i+1}, x_{2,j}) &= 1 + \xi_1^{(1)} = 0, & \Leftrightarrow \quad \xi_1^{(1)} = -1, \quad \xi_2^{(1)} = 0. \\ \varphi_{ij}(x_{1,i+1}, x_{2,j+1}) &= 1 + \xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} = 0; \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Следствие. Производные базисных функций φ_{ij} на носителе ω_{ij} представимы в виде:

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_1} = \frac{\xi_1^{(k)}}{h_1}, \quad \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_2} = \frac{\xi_2^{(k)}}{h_2}, \quad (x_1, x_2) \in G_{ij}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

1.4.3 Кусочно-линейные восполнения двумерных сеточных функций

Пусть $u(x_1, x_2) \in \overset{0}{W}_2^1(G)$ — функция, определенная в прямоугольнике G , а $u_{ij} = u(x_{1,i}, x_{2,j})$ — ее значения в узлах сетки Ω_h .

Определение. Кусочно-линейным восполнением функции $u(x_1, x_2)$ на сетке Ω_h называется функция

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} u_{ij} \varphi_{ij}(x_1, x_2).$$

Замечание. Из определения следует, что $\tilde{u}(x_1, x_2) \in \overset{0}{W}_{\frac{1}{2}}(G)$, поскольку является непрерывной в \bar{G} , кусочно-дифференцируемой в G и обращается в нуль на границе ∂G . Кроме того, $\tilde{u}(x_{1,i}, x_{2,j}) = u_{ij}$ в узлах сетки Ω_h .

Обозначим через H_N линейную оболочку базисных функций $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$, тогда $\tilde{u}(x_1, x_2) \in H_N$. Очевидно, что H_N является конечномерным подпространством пространства $\overset{0}{W}_{\frac{1}{2}}(G)$ размерности $N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)$.

Лемма 1.10. Для произвольной функции $v \in H_N$, где

$$v(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} v_{ij} \varphi_{ij}(x_1, x_2),$$

на носителе ω_{ij} справедливо представление:

$$v(x_1, x_2) = v_{ij} + \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1 - x_{1,i}) + \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_2 - x_{2,j}), \quad (x_1, x_2) \in G_{ij}^{(k)};$$

где частные производные функции v в треугольниках $G_{ij}^{(k)}$ имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \begin{cases} v_{x_{1,ij}}, & k = 1, 6; \\ v_{x_{1,ij+1}}, & k = 2; \\ v_{\bar{x}_{1,ij}}, & k = 3, 4; \\ v_{\bar{x}_{1,ij-1}}, & k = 5; \end{cases} \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \begin{cases} v_{x_{2,i+1j}}, & k = 1; \\ v_{x_{2,ij}}, & k = 2, 3; \\ v_{\bar{x}_{2,i-1j}}, & k = 4; \\ v_{\bar{x}_{2,ij}}, & k = 5, 6. \end{cases}$$

▼ Доказательство. Рассмотрим треугольник $G_{ij}^{(1)}$ (для остальных треугольников доказательство аналогично). На этом треугольнике не тождественно равны нулю лишь три базисные функции, поэтому

$$v = v_{ij} \varphi_{ij} + v_{i+1j} \varphi_{i+1j} + v_{i+1j+1} \varphi_{i+1j+1}.$$

Согласно лемме 1.9, а также учитывая, что $G_{ij}^{(1)} = G_{i+1j}^{(3)} = G_{i+1j+1}^{(5)}$,

$$\varphi_{ij} = 1 - \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1};$$

$$\varphi_{i+1j} = 1 + \frac{x_1 - x_{1,i+1}}{h_1} - \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2} = \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1} - \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2};$$

$$\varphi_{i+1j+1} = 1 + \frac{x_2 - x_{2,j+1}}{h_2} = \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}.$$

Здесь учтено, что $x_{1,i+1} = x_{1,i} + h_1$, $x_{2,j+1} = x_{2,j} + h_2$. Отсюда

$$\begin{aligned} v &= v_{ij} + (v_{i+1j} - v_{ij}) \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1} + (v_{i+1j+1} - v_{i+1j}) \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2} = \\ &= v_{ij} + v_{x_1,ij}(x_1 - x_{1,i}) + v_{x_2,i+1j}(x_2 - x_{2,j}). \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Поскольку кусочно-линейное восполнение $\tilde{u}(x_1, x_2) \in H_N$, для него справедливо аналогичное представление на ω_{ij} .

1.4.4 Построение конечноэлементного решения задачи Дирихле

Определение. Приближенным решением задачи Дирихле называется функция $u_N \in H_N$, удовлетворяющая уравнению $a(u_N, v) = (f, v)$ при всех $v \in H_N$.

Замечание. Выполнение последнего равенства при всех $v \in H_N$ эквивалентно условиям

$$a(u_N, \varphi_{ij}) = (f, \varphi_{ij}); \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

При этом, поскольку приближенное решение $u_N \in H_N$,

$$u_N(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij} \varphi_{ij}(x_1, x_2),$$

и его нахождение сводится к нахождению коэффициентов y_{ij} .

Вычислим интеграл

$$a(u_N, \varphi_{ij}) = \int_G \left[\frac{\partial u_N}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_N}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2.$$

Поскольку функция φ_{ij} отлична от нуля лишь на носителе ω_{ij} , достаточно с учетом лемм 1.9, 1.10 вычислить

$$\int_{\omega_{ij}} \frac{\partial u_N}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \frac{1}{h_1} \int_{G_{ij}^{(3)} \cup G_{ij}^{(4)}} \frac{\partial u_N}{\partial x_1} dx_1 dx_2 - \frac{1}{h_1} \int_{G_{ij}^{(1)} \cup G_{ij}^{(6)}} \frac{\partial u_N}{\partial x_1} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{h_1} y_{\bar{x}_1, ij} h_1 h_2 - \frac{1}{h_1} y_{x_1, ij} h_1 h_2 = -h_1 h_2 y_{\bar{x}_1, ij}.$$

Аналогично

$$\int_{\omega_{ij}} \frac{\partial u_N}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = -h_1 h_2 y_{\bar{x}_2, ij}.$$

Окончательно получаем

$$a(u_N, \varphi_{ij}) = -h_1 h_2 \Delta_h y_{ij},$$

где $\Delta_h y_{ij} = (y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij}$ — пятиточечный разностный оператор Лапласа.

Учитывая равенство

$$(f, \varphi_{ij}) = \int_{\omega_{ij}} f(x_1, x_2) \varphi_{ij}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

приходим к системе уравнений для отыскания коэффициентов y_{ij} :

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -\frac{1}{h_1 h_2} \int_{\omega_{ij}} f \varphi_{ij} dx_1 dx_2, & x_{ij} \in \omega_h; \\ y_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h. \end{cases} \quad (1.6)$$

Замечание. Система (1.6) представляет собой разностную схему с аппроксимацией правой части путем усреднения функции $f(x_1, x_2)$ с ядром φ_{ij} по области ω_{ij} , поскольку $\varphi_{ij} \geq 0$, $\frac{1}{h_1 h_2} \int_{\omega_{ij}} \varphi_{ij} dx_1 dx_2 = 1$ (объем пирамиды с высотой, равной единице, и основанием ω_{ij} площади $3h_1 h_2$). Решение системы обычно находится с помощью итерационных методов, которые будут обсуждаться в главе 3.

Теорема 1.5. *Приближенное решение $u_N(x_1, x_2)$ сходится к точному решению $u(x_1, x_2)$ в пространстве $W_2^0(G)$ с первым порядком.*

Доказательство этого утверждения, приведенное, например, в книге [3], не входит в программу данного курса лекций.

1.5 Задачи к главе 1

Задача 1.1. Доказать линейную независимость функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^N$, определенных в пункте 1.1.1.

Задача 1.2. Вычислить интегралы $g_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x) dx$; $i, j = 0, 1, \dots, N$; и показать, что базис $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^N$ не является ортогональным в смысле скалярного произведения $(u, v) = \int_a^b uv dx$.

Ответ:

$$g_{00} = h_1/3, \quad g_{NN} = h_N/3, \quad g_{ii} = (h_i + h_{i+1})/3; \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$g_{i-1i} = g_{ii-1} = h_i/6; \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

$$g_{ij} = 0; \quad |i - j| > 1; \quad i, j = 0, 1, \dots, N.$$

Задача 1.3. Построить кусочно-линейное восполнение $\tilde{u}(x)$ функции $u(x) = x(1-x)$ на равномерной сетке отрезка $[0, 1]$. Оценить среднеквадратичные отклонения $\left(\int_0^1 (\tilde{u} - u)^2 dx\right)^{1/2}$, $\left(\int_0^1 (\tilde{u}' - u')^2 dx\right)^{1/2}$.

Ответ:

$$x_i = ih, \quad u_i = ih(1 - ih); \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad hN = 1;$$

$$\tilde{u}(x) = u_{i-1} \frac{x_i - x}{h} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{h}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i];$$

$$\left(\int_0^1 (\tilde{u} - u)^2 dx\right)^{1/2} \leq 2h^2, \quad \left(\int_0^1 (\tilde{u}' - u')^2 dx\right)^{1/2} \leq 2h.$$

Задача 1.4. Оценить среднеквадратичное отклонение от функции $u(x) = \ln x$ ее кусочно-линейного восполнения $\tilde{u}(x)$ на равномерной сетке отрезка $[1, 2]$.

Ответ: $\left(\int_1^2 (\tilde{u} - u)^2 dx\right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{7}{24}} h^2.$

Задача 1.5. На равномерной сетке отрезка $[0, 1]$ построить приближенное в смысле МКЭ решение задачи

$$u''(x) = -x, \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Ответ:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \varphi_i(x);$$

$$y_{\bar{x}_i, i} = -x_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0.$$

Задача 1.6. На равномерной сетке отрезка $[0, 1]$ построить приближенное в смысле МКЭ решение задачи

$$u''(x) = -x^2, \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Ответ:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \varphi_i(x);$$
$$y_{\bar{x},i} = -\left(x_i^2 + h^2/6\right); \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0.$$

Задача 1.7. На неравномерной сетке отрезка $[0, 1]$ построить приближенное в смысле МКЭ решение задачи

$$u''(x) = 2, \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

Ответ:

$$u_N(x) = x + \sum_{i=1}^{N-1} y_i \varphi_i(x);$$
$$y_{x,i} - y_{\bar{x},i} = h_i + h_{i+1}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0.$$

Задача 1.8. На неравномерной сетке отрезка $[0, 1]$ построить приближенное в смысле МКЭ решение задачи

$$u''(x) - qu(x) = f(x), \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (q = \text{const} \geq 0).$$

Ответ:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i \varphi_i(x);$$
$$y_{x,i} - y_{\bar{x},i} - \frac{q}{6} (h_i y_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})y_i + h_{i+1}y_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx;$$
$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0.$$

Задача 1.9. Выписать выражения для базисных функций $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$, отличных от нуля в треугольниках $G_{ij}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, 6$ (см. пункт 1.4.2).

Ответ: Например, для треугольника $G_{ij}^{(4)}$ отличны от нуля функции:

$$\varphi_{ij} = 1 + \frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1}; \quad \varphi_{i-1j-1} = -\frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2};$$
$$\varphi_{i-1j} = -\frac{x_1 - x_{1,i}}{h_1} + \frac{x_2 - x_{2,j}}{h_2}.$$

Задача 1.10. Вычислить интеграл $F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\omega_{ij}} f \varphi_{ij} dx_1 dx_2$ в случаях:

1) $f(x_1, x_2) = 1$; 2) $f(x_1, x_2) = x_1$; 3) $f(x_1, x_2) = x_2$.

Ответ: 1) 1; 2) $x_{1,i}$; 3) $x_{2,j}$.

Задача 1.11. Получить систему уравнений, которой удовлетворяют коэффициенты приближенного по МКЭ решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -(x_1 + x_2), & x = (x_1, x_2) \in G; \\ u(x) = 0, & x \in \partial G. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -(x_{1,i} + x_{2,j}), & x_{ij} \in \omega_h; \\ y_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h. \end{cases}$$

Здесь, как и ранее:

$$\Delta_h y_{ij} = (y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij};$$

$$x_{ij} = (x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2; \quad h_1 N_1 = l_1, \quad h_2 N_2 = l_2;$$

$$\omega_h = \{x_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\};$$

$$\gamma_h = \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1j}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}.$$

Глава 2

Принцип максимума для разностных схем

2.1 Разностная аппроксимация задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x), & x = (x_1, x_2) \in G; \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial G. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь, как и ранее, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа.

Замечание. Непрерывное в $\bar{G} = G + \partial G$ и отличное от постоянного решение задачи (2.1) при $f(x) = 0$ (задача Дирихле для уравнения Лапласа) достигает своего максимального по модулю значения на границе ∂G . Данное утверждение обычно называют принципом максимума.

Введем в \bar{G} равномерную разностную сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= (x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2; \quad h_1 N_1 = l_1, \quad h_2 N_2 = l_2; \\ \omega_h &= \{x_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}; \\ \gamma_h &= \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1j}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}. \end{aligned}$$

Здесь ω_h — множество внутренних, а γ_h — множество граничных узлов сетки.

Как и ранее, будем пользоваться обозначениями

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} = \frac{y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j}}{h_1^2}, \quad y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h_2^2}.$$

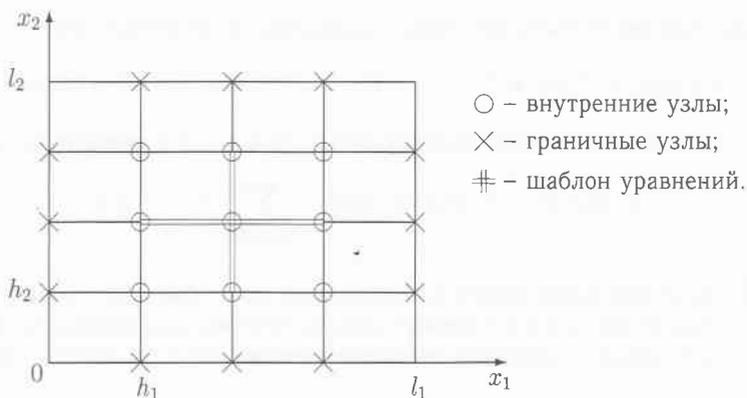


Рис. 2.1. Разностная сетка

где $y_{ij} = y(x_{ij})$ – сеточная функция, определенная на Ω_h , и сопоставим задаче (2.1) разностную схему:

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}), & x_{ij} \in \omega_h; \\ y_{ij} = \mu(x_{ij}), & x_{ij} \in \gamma_h. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь, как и ранее, $\Delta_h y_{ij} = (y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij}$ – пятиточечный разностный оператор Лапласа.

Замечание. Разностная схема (2.2) имеет второй порядок аппроксимации и представляет собой систему $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ линейных алгебраических уравнений с тем же числом неизвестных.

Запишем уравнение $\Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij})$ в виде

$$\left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right) y_{ij} = \frac{y_{i-1j} + y_{i+1j}}{h_1^2} + \frac{y_{ij-1} + y_{ij+1}}{h_2^2} + f_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h.$$

Введем обозначения:

$x = x_{ij}$ – центральный узел шаблона;

$\Pi(x) = \{x, x_{i\pm 1j}, x_{ij\pm 1}\}$ – шаблон уравнений;

$\Pi'(x) = \Pi(x) \setminus \{x\}$ – окрестность узла x ;

$$A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}, \quad B(x, x_{i\pm 1j}) = \frac{1}{h_1^2}, \quad B(x, x_{ij\pm 1}) = \frac{1}{h_2^2}, \quad F(x) = f(x_{ij}).$$

В этих обозначениях уравнение может быть записано в следующей форме:

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h.$$

Аналогично могут быть записаны и уравнения в граничных узлах:

$$A(x)y(x) = F(x), \quad x \in \gamma_h, \quad \text{где } \mathcal{H}'(x) = \emptyset, \quad A(x) = 1, \quad F(x) = \mu(x).$$

Замечание. Выполнены условия положительности коэффициентов:

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0, \quad D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{H}'(x)} B(x, \xi) \geq 0, \quad x \in \Omega_h.$$

В указанной форме (далее канонической) могут быть записаны разностные схемы из достаточно широкого класса, поэтому дальнейшие исследования целесообразно проводить без учета конкретного вида коэффициентов.

2.2 Принцип максимума

Определение. Разностной сеткой Ω_h называется непустое конечное множество точек n -мерного евклидова пространства.

Определение. Шаблоном $\mathcal{H}(x)$ узла сетки $x \in \Omega_h$ называется любое подмножество Ω_h , содержащее x . Окрестностью узла x называется множество $\mathcal{H}'(x) = \mathcal{H}(x) \setminus \{x\}$.

Замечание. Окрестность $\mathcal{H}'(x)$ узла x может быть пустым множеством.

Определение. Пусть функции $A(x)$, $B(x, \xi)$, $F(x)$ определены при всех $x, \xi \in \Omega_h$. Разностной схемой в канонической форме записи называется система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестной сеточной функции $y(x)$, определенной на Ω_h ,

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{H}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \Omega_h, \quad (2.3)$$

если каждому узлу $x \in \Omega_h$ сопоставлен один и только один шаблон и одно и только одно уравнение.

Определение. Узел $x \in \Omega_h$ называется внутренним, если $\mathcal{H}'(x) \neq \emptyset$. В противном случае узел называется граничным.

Определение. Сетка Ω_h называется связной, если

$$\forall x', x'' \in \Omega_h : \mathcal{H}'(x') \neq \emptyset \exists x_i \in \Omega_h, \quad i = 1, 2, \dots, m : \\ x_1 \in \mathcal{H}'(x'), \quad x_2 \in \mathcal{H}'(x_1), \quad \dots, \quad x_m \in \mathcal{H}'(x_{m-1}), \quad x'' \in \mathcal{H}'(x_m).$$

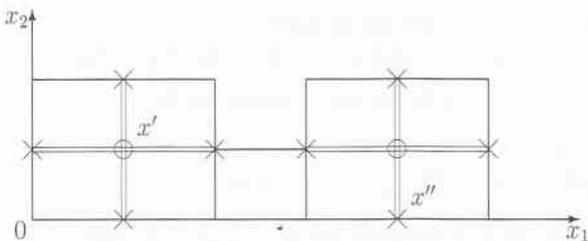


Рис. 2.2. Пример несвязной сетки (обозначения те же, что и на рис.2.1)

Замечание. Связность означает, что от произвольного внутреннего узла сетки можно «перейти» к любому другому узлу сетки по заданным шаблонам. Если множество внутренних узлов пустое, то сетка формально несвязна, а схема (2.3) распадается на независимые уравнения $A(x)y(x) = F(x)$, $x \in \Omega_h$.

Определим линейный оператор L формулами

$$Ly(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{N}'(x)} B(x, \xi)y(\xi), \quad x \in \Omega_h,$$

и обозначим $D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{N}'(x)} B(x, \xi)$. Тогда в другой форме записи

$$Ly(x) = D(x)y(x) + \sum_{\xi \in \mathcal{N}'(x)} B(x, \xi)(y(x) - y(\xi)),$$

а разностную схему можно записать в виде

$$Ly(x) = F(x), \quad x \in \Omega_h.$$

Определение. В узле $x \in \Omega_h$ выполнены условия положительности коэффициентов, если

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{N}'(x), \quad D(x) \geq 0. \quad (2.4)$$

Далее будем предполагать, что $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$, где $\omega_h \neq \emptyset$ — множество внутренних узлов сетки, γ_h — множество граничных узлов, которое может быть пустым.

Теорема 2.1 (Принцип максимума). Пусть функция $y(x)$ определена и не является постоянной на связной сетке Ω_h , а условия положительности коэффициентов (2.4) выполнены при всех $x \in \omega_h$. Тогда, если $Ly(x) \leq 0$ ($Ly(x) \geq 0$) для любых $x \in \omega_h$, то $y(x)$ не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения на ω_h среди всех своих значений на Ω_h .

▼ Доказательство. От противного.

Пусть $\exists x' \in \omega_h : y(x') = \max_{x \in \Omega_h} y(x) > 0$, тогда $\exists x'' \in \Omega_h : y(x'') < y(x')$, поскольку $y(x) \neq \text{const}$ на Ω_h . В силу связности Ω_h

$$\begin{aligned} & \exists x_i \in \omega_h, i = 1, \dots, m : \\ & x_1 \in \Pi'(x'), x_2 \in \Pi'(x_1), \dots, x_m \in \Pi'(x_{m-1}), x'' \in \Pi'(x_m). \end{aligned}$$

В силу условий (2.4) и неравенства $y(\xi) \leq y(x') = \max_{x \in \Omega_h} y(x) \forall \xi \in \Omega_h$

$$Ly(x') = D(x')y(x') + \sum_{\xi \in \Pi'(x')} B(x', \xi)(y(x') - y(\xi)) \geq 0.$$

В то же время по условию $Ly(x') \leq 0$, т.к. $x' \in \omega_h$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} & Ly(x') = 0 \text{ и } y(\xi) = y(x') \forall \xi \in \Pi'(x'), \text{ то есть} \\ & y(x_1) = y(x') = \max_{x \in \Omega_h} y(x) > 0. \end{aligned}$$

Повторяя аналогичные рассуждение для узла x_1 , покажем, что

$$y(x_2) = y(x_1) = \max_{x \in \Omega_h} y(x) > 0,$$

и так далее. Окончательно получим

$$y(x'') = y(x_m) = \dots = y(x_1) = y(x'),$$

что противоречит неравенству $y(x'') < y(x')$.

▲ Утверждение доказано.

2.3 Следствия принципа максимума

Далее будем считать сетку Ω_h связной и выполненным условие

$$\exists x_0 \in \Omega_h : D(x_0) > 0. \quad (2.5)$$

Теорема 2.2 (Монотонность оператора L). Пусть выполнено условие (2.5) и условия (2.4) при всех $x \in \Omega_h$. Тогда, если $Ly(x) \leq 0$ ($Ly(x) \geq 0$) для любых $x \in \Omega_h$, то $y(x) \leq 0$ ($y(x) \geq 0$) для любых $x \in \Omega_h$.

▼ Доказательство.

1) Пусть $y(x) \neq \text{const}$ на Ω_h . Предположим, что $\exists x \in \Omega_h : y(x) > 0$, тогда $\exists x' \in \Omega_h : y(x') = \max_{x \in \Omega_h} y(x) > 0$. Это противоречит принципу максимума, если узел x' внутренний. Если этот узел граничный, то

$$Ly(x') = A(x')y(x') \leq 0,$$

где $A(x') > 0$, откуда $y(x') \leq 0$, что противоречит неравенству $y(x') > 0$.

2) Пусть $y(x) = \text{const}$ на Ω_h . Тогда,

$$\begin{aligned} Ly(x_0) &= D(x_0)y(x_0) + \sum_{\xi \in \mathbb{M}'(x_0)} B(x_0, \xi)(y(x_0) - y(\xi)) = \\ &= D(x_0)y(x_0) \leq 0, \end{aligned}$$

и, учитывая, что $D(x_0) > 0$, $y(x_0) \leq 0$. То есть $y(x) \equiv y(x_0) \leq 0$ на Ω_h .

▲ Утверждение доказано.

Определение. Разностная схема (2.3), удовлетворяющая условиям положительности коэффициентов (2.4) для всех узлов сетки Ω_h , называется *монотонной*. В противном случае схема называется *немонотонной*.

Теорема 2.3 (Существование и единственность решения). Пусть выполнено условие (2.5) и условия (2.4) при всех $x \in \Omega_h$. Тогда разностная задача $Ly(x) = F(x)$, $x \in \Omega_h$ имеет единственное решение.

▼ Доказательство.

Достаточно показать, что однородная задача $Ly(x) = 0$, $x \in \Omega_h$ имеет только тривиальное решение. Для произвольного решения этой задачи

$$\begin{cases} Ly(x) \geq 0, \\ Ly(x) \leq 0, \end{cases} \quad \forall x \in \Omega_h \Rightarrow \begin{cases} y(x) \geq 0, \\ y(x) \leq 0, \end{cases} \quad \forall x \in \Omega_h \Leftrightarrow y(x) \equiv 0 \text{ на } \Omega_h.$$

▲ Утверждение доказано.

Теорема 2.4 (Теорема сравнения). Пусть выполнено условие (2.5) и условия (2.4) при всех $x \in \Omega_h$. Тогда, если $|F(x)| \leq \bar{F}(x)$ для любых $x \in \Omega_h$, то $|y(x)| \leq \bar{y}(x)$ для любых $x \in \Omega_h$, где $y(x)$ — решение задачи $Ly(x) = F(x)$, $x \in \Omega_h$, $\bar{y}(x)$ — решение задачи $L\bar{y}(x) = \bar{F}(x)$, $x \in \Omega_h$.

▼ Доказательство. Рассмотрим вспомогательные функции

$$v(x) = \bar{y}(x) + y(x), w(x) = \bar{y}(x) - y(x).$$

$$\begin{cases} Lv(x) = \bar{F}(x) + F(x) \geq 0, \\ Lw(x) = \bar{F}(x) - F(x) \geq 0, \end{cases} \quad \forall x \in \Omega_h \Rightarrow \begin{cases} v(x) \geq 0, \\ w(x) \geq 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна неравенству $-\bar{y}(x) \leq y(x) \leq \bar{y}(x)$.

▲ Утверждение доказано.

Пусть множество граничных узлов сетки Ω_h не пусто, т.е. $\gamma_h \neq \emptyset$. Тогда разностная схема (2.3) $Ly(x) = F(x)$, $x \in \Omega_h$ может быть записана в форме первой краевой задачи

$$\begin{cases} Ly(x) = F(x), & x \in \omega_h; \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h; \end{cases}$$

где $\mu(x) = F(x)/A(x)$, $x \in \gamma_h$ ($A(x) > 0 \forall x \in \Omega_h$).

Замечание. При выполнении условий (2.4) $\forall x \in \Omega_h$ условие (2.5) для первой краевой задачи выполнено автоматически, т.к. $D(x) = 1 > 0 \forall x \in \gamma_h$.

Следствие (Существование и единственность решения краевой задачи). Пусть условия (2.4) выполнены при всех $x \in \omega_h$. Тогда краевая задача имеет единственное решение.

Следствие (Теорема сравнения для краевой задачи).

Пусть условия (2.4) выполнены при всех $x \in \omega_h$. Тогда, если $|F(x)| \leq \bar{F}(x)$ для любых $x \in \omega_h$, $|\mu(x)| \leq \bar{\mu}(x)$ для любых $x \in \gamma_h$, то $|y(x)| \leq \bar{y}(x)$ для любых $x \in \Omega_h$, где

$y(x)$ — решение задачи $Ly(x) = F(x)$, $x \in \omega_h$; $y(x) = \mu(x)$, $x \in \gamma_h$;

$\bar{y}(x)$ — решение задачи $L\bar{y}(x) = \bar{F}(x)$, $x \in \omega_h$; $\bar{y}(x) = \bar{\mu}(x)$, $x \in \gamma_h$.

Следствие (Устойчивость краевой задачи по граничным условиям).

Пусть условия (2.4) выполнены при всех $x \in \omega_h$. Тогда для решения задачи

$$Ly(x) = 0, \quad x \in \omega_h; \quad y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h;$$

справедлива оценка $\max_{x \in \omega_h} |y(x)| \leq \max_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|$.

Замечание. Последнее утверждение вытекает непосредственно из принципа максимума.

2.4 Устойчивость и сходимость разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Вернемся к исследованию разностной задачи (2.2):

$$\begin{cases} -\Delta_h y = f(x), & x \in \omega_h; \\ y = \mu(x), & x \in \gamma_h. \end{cases}$$

Ранее показано, что для линейного оператора

$$Ly(x) = -\Delta_h y(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{N}'(x)} B(x, \xi)y(\xi), \quad x \in \omega_h;$$

$$A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}, B(x, x_{i\pm 1j}) = \frac{1}{h_1^2}, B(x, x_{ij\pm 1}) = \frac{1}{h_2^2};$$

условия положительности коэффициентов (2.4) выполнены $\forall x \in \Omega_h$. Согласно первому следствию из предыдущего параграфа это означает существование и единственность решения задачи (2.2). Представим это решение в виде $y(x) = y_\mu(x) + y_F(x)$, где

$y_\mu(x)$ — решение задачи $Ly_\mu(x) = 0, x \in \omega_h; y_\mu(x) = \mu(x), x \in \gamma_h;$

$y_F(x)$ — решение задачи $Ly_F(x) = F(x), x \in \omega_h; y_F(x) = 0, x \in \gamma_h.$

Теорема 2.5 (Устойчивость по граничным условиям).

$$\|y_\mu(x)\|_{C(\Omega_h)} \leq \|\mu(x)\|_{C(\gamma_h)}.$$

▼ Доказательство. Согласно третьему следствию теоремы 2.4

$$\max_{x \in \omega_h} |y_\mu(x)| \leq \max_{x \in \gamma_h} |\mu(x)| \Rightarrow \max_{x \in \Omega_h} |y_\mu(x)| \leq \max_{x \in \gamma_h} |\mu(x)|,$$

поскольку $y_\mu(x) = \mu(x), x \in \gamma_h.$

▲ Утверждение доказано.

Теорема 2.6 (Устойчивость по правой части).

$$\|y_F(x)\|_{C(\Omega_h)} \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}.$$

▼ Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\bar{y}(x) = K(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2), K = \text{const}, x = (x_1, x_2) \in \Omega_h.$$

Учтем, что на многочленах второй степени вторая разностная производная имеет те же значения, что и дифференциальная производная, поскольку

$$(x^2)_{\bar{x}x,i} = \frac{(x_i - h)^2 - 2x_i^2 + (x_i + h)^2}{h^2} = 2,$$

$$(x)_{\bar{x}x,i} = 0, (c)_{\bar{x}x} = 0 (c = \text{const}).$$

Поэтому

$$L\bar{y}(x) = -\Delta_h \bar{y}(x) = -(\bar{y}_{\bar{x}_1 x_1} + \bar{y}_{\bar{x}_2 x_2})_{ij} = 4K.$$

Положим $K = \frac{1}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}$, тогда $\bar{y}(x)$ является решением задачи

$$L\bar{y}(x) = \bar{F}(x), x \in \omega_h; \bar{y}(x) = \bar{\mu}(x), x \in \gamma_h;$$

где $\bar{F}(x) = \|F(x)\|_{C(\omega_h)}$, $\bar{\mu}(x) > 0$. По теореме сравнения для краевой задачи $|y_F(x)| \leq \bar{y}(x) \forall x \in \Omega_h$, то есть

$$\|y_F(x)\|_{C(\Omega_h)} = \max_{x \in \Omega_h} |y_F(x)| \leq \max_{x \in \Omega_h} |\bar{y}(x)| < \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}.$$

▲ Утверждение доказано.

Теорема 2.7 (Устойчивость разностной задачи Дирихле). Для решения $y(x)$ разностной задачи (2.2) справедлива оценка

$$\|y(x)\|_{C(\Omega_h)} \leq \|\mu(x)\|_{C(\gamma_h)} + \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F(x)\|_{C(\omega_h)}.$$

Утверждение следует из двух предыдущих теорем.

Теорема 2.8 (Сходимость разностной задачи Дирихле). Пусть u — решение дифференциальной задачи (2.1), а y — решение разностной задачи (2.2). Тогда $\|y - u\|_{C(\Omega_h)} \leq M(h_1^2 + h_2^2)$, где M — постоянная, не зависящая от h_1, h_2 .

▼ Доказательство. Погрешность разностной задачи (2.2) $z_{ij} = y_{ij} - u(x_{ij})$, $x_{ij} \in \Omega_h$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \Delta_h z_{ij} = -\psi_{ij}, & x_{ij} \in \omega_h; \\ z_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h; \end{cases} \quad \text{где } \psi_{ij} = (u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2} + f)_{ij}$$

— погрешность аппроксимации разностной задачи (2.2) на решении $u(x)$ дифференциальной задачи (2.1). Поскольку вторая разностная производная аппроксимирует вторую производную достаточно гладкой функции со вторым порядком, справедливо неравенство

$$\|\psi\|_{C(\omega_h)} \leq \tilde{M}(h_1^2 + h_2^2),$$

где постоянная \tilde{M} не зависит от h_1 и h_2 . В силу устойчивости имеем

$$\|z(x)\|_{C(\Omega_h)} \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\psi\|_{C(\omega_h)}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|z(x)\|_{C(\Omega_h)} \leq M(h_1^2 + h_2^2), \quad \text{где } M = \tilde{M} \frac{l_1^2 + l_2^2}{4}.$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Доказанная теорема является следствием более общего утверждения.

Теорема 2.9. *В случае линейного разностного оператора из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.*

▼ **Доказательство.** Пусть u — решение дифференциальной задачи

$$lu = f, \quad x \in G;$$

а y — решение аппроксимирующей ее разностной задачи

$$Ly = F, \quad x \in \Omega_h;$$

на разностной сетке $\Omega_h \subset G$, $\text{diam } \Omega_h = h$. Рассмотрим сеточные функции: $\psi_l = (lu)_h - Lu_h$, $x \in \Omega_h$ — погрешность аппроксимации дифференциального оператора l разностным оператором L (индекс h обозначает проекцию соответствующих функций непрерывного аргумента на разностную сетку Ω_h); $\psi_f = F - f_h$, $x \in \Omega_h$ — погрешность аппроксимации правой части. Погрешность решения разностной задачи $z = y - u_h$, $x \in \Omega_h$ удовлетворяет уравнению

$$Lz = F - Lu_h = F - f_h + (lu)_h - Lu_h = \psi_f + \psi_l = \psi, \quad x \in \Omega_h;$$

где ψ — погрешность аппроксимации разностной задачи на решении дифференциальной задачи. Аппроксимация с порядком k означает, что $\|\psi\|_{\Omega_h} \leq M_1 h^k$, а устойчивость — $\|y\|_{\Omega_h} \leq M_2 \|F\|_{\Omega_h}$. Здесь постоянные M_1 и M_2 не зависят от h . Отсюда вытекает оценка $\|z\|_{\Omega_h} \leq M_1 M_2 h^k$, означающая сходимость с порядком k .

▲ Утверждение доказано.

2.5 Примеры применения принципа максимума

Замечание. В параграфе 2.3 показано, что условия монотонности разностной схемы (2.4) зачастую являются достаточными для ее корректности, то есть существования и единственности решения разностных уравнений и устойчивости схемы. Разумеется, отсюда не следует, что немонотонная схема обязательно некорректна.

Пример 2.1 (Схемы с весами для уравнения теплопроводности). Рассмотрим первую краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T; \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t); \quad u(x, 0) = u_0(x). \end{aligned}$$

Введем разностную сетку $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \omega_\tau$, где

$$\begin{aligned}\Omega_h &= \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; hN = 1\}; \\ \omega_h &= \{x_i; i = 1, 2, \dots, N-1\}; \gamma_h = \{x_0, x_N\}; \\ \omega_\tau &= \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, K; \tau K = T\};\end{aligned}$$

и сопоставим исходной задаче разностную схему

$$\begin{aligned}\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} &= \sigma y_{\bar{x},i}^{n+1} + (1 - \sigma) y_{\underline{x},i}^n; \\ i &= 1, 2, \dots, N-1; n = 0, 1, \dots, K-1; \\ y_0^{n+1} &= \mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}); y_i^0 = u_0(x_i).\end{aligned}$$

Здесь σ — числовой параметр, называемый весом схемы. Чтобы записать основное уравнение в канонической форме, разрешим его относительно y_i^{n+1} .

$$\begin{aligned}(1 + 2\sigma\gamma)y_i^{n+1} &= (1 - 2(1 - \sigma)\gamma)y_i^n + \sigma\gamma(y_{i-1}^{n+1} + y_{i+1}^{n+1}) + \\ &+ (1 - \sigma)\gamma(y_{i-1}^n + y_{i+1}^n), \quad \gamma = \tau/h^2.\end{aligned}$$

В каждом узле $x = (x_i, t_{n+1})$ шаблон $\mathcal{M}(x)$ состоит из шести точек, а окрестность $\mathcal{M}'(x)$ состоит из пяти точек $(x_{i\pm 1}, t_{n+1}), (x_i, t_n), (x_{i\pm 1}, t_n)$. Условия положительности коэффициентов сводятся к неравенствам $0 < \sigma < 1$, $\sigma > 1 - 1/(2\gamma)$. Заметим, что схема останется монотонной и в том случае, если эти неравенства заменить на нестрогие, то есть потребовать

$$0 \leq \sigma \leq 1, \quad \sigma \geq 1 - \frac{1}{2\gamma}.$$

При выполнении одного из условий со знаком равенства, окрестность $\mathcal{M}'(x)$ состоит не из пяти, а из меньшего числа узлов (см. рис.2.3).

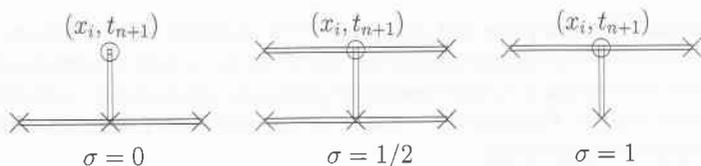


Рис. 2.3. Шаблон уравнений $\mathcal{M}(x)$ при различных значениях σ

В частности, явная схема ($\sigma = 0$) монотонна при условии $\tau \leq h^2/2$, шеститочечная симметричная схема второго порядка аппроксимации ($\sigma = 1/2$) при условии $\tau \leq h^2$, а чисто неявная схема ($\sigma = 1$) монотонна при любых τ и h .

Пример 2.2 (Метод гармоник).

1) Покажем неустойчивость явной схемы

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \mathcal{L}_{\bar{x},i}^n y_i^n$$

при $\tau > h^2/2$, используя так называемый метод гармоник.

Будем искать частные решения уравнения, имеющие вид

$$y_i^n(\varphi) = q^n e^{ih\varphi I},$$

где символом I (чтобы не менять предыдущих обозначений) обозначена мнимая единица, φ — произвольное действительное число, а q — число, подлежащее определению. Это решение удовлетворяет начальным условиям

$$y_i^0 = \cos(\varphi x_i) + I \sin(\varphi x_i),$$

представляющим собой различные гармоники в зависимости от φ . Отсюда, собственно, и название метода. Подставляя указанное частное решение в уравнение, получим

$$\frac{q - 1}{\tau} = \frac{e^{-h\varphi I} - 2 + e^{h\varphi I}}{h^2} = \frac{2(\cos(h\varphi) - 1)}{h^2},$$

откуда найдем $q = 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}$, $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$.

Если для некоторого φ окажется, что $|q| > 1$, то частное решение, равномерно ограниченное по φ при $n = 0$, будет неограниченно возрастать при $n \rightarrow \infty$. В этом случае нарушается условие устойчивости по начальным данным вида

$$\|y^n\|_C \leq M \|y^0\|_C,$$

где постоянная M не зависит от n , означающее непрерывную зависимость решения разностного уравнения от начальных условий. Нарушение этого условия делает практически невозможным нахождение численного решения, поскольку погрешности (например, погрешности округления), внесенные в начальный момент времени, будут неограниченно возрастать при увеличении n .

В рассматриваемом примере $|q| > 1$ при $4\gamma > 2$, то есть схема неустойчива при $\tau > h^2/2$.

Замечание. Неравенство $|q| > 1$ фактически является достаточным условием неустойчивости, а неравенство $|q| \leq 1$ — необходимым условием устойчивости.

2) Теперь найдем необходимое условие устойчивости схемы с весами при $\sigma \neq 0$. Подставляя в уравнение

$$y_{t,i}^n = \sigma y_{\bar{x},i}^{n+1} + (1 - \sigma) y_{\bar{x},i}^n$$

частное решение $y_i^n(\varphi) = q^n e^{ih\varphi I}$, так же, как и для явной схемы, получим равенство

$$q = 1 - (\sigma q + (1 - \sigma)) 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}.$$

Обозначая $s = \sin^2(h\varphi/2)$, находим $q = \frac{1 - 4(1 - \sigma)\gamma s}{1 + 4\sigma\gamma s}$. Далее решим неравенство $|q| \leq 1$:

$$|1 - 4(1 - \sigma)\gamma s| \leq 1 + 4\sigma\gamma s \Leftrightarrow \begin{cases} -4\gamma s \leq 0; \\ 2 - 4(1 - 2\sigma)\gamma s \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что $s \in [0; 1]$, приходим к неравенству $1 - 2\sigma \leq 1/(2\gamma)$, откуда окончательно получим условие

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\gamma}.$$

Замечание. Сопоставляя это условие с полученным ранее условием монотонности схемы с весами $\sigma \geq 1 - 1/(2\gamma)$, приходим к выводу, что монотонность является, вообще говоря, более сильным требованием, чем просто устойчивость.

Пример 2.3 (Схема с переменными коэффициентами). Исследуем разностную схему для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\rho_i^n \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = (ay_{\bar{x}})_{x,i}^n, \quad 0 < c_1 \leq a_i^n \leq c_2, \quad \rho_i^n \geq c_3 > 0.$$

Перепишывая это разностное уравнение в виде

$$\frac{\rho_i^n}{\tau} y_i^{n+1} = \frac{1}{h^2} (a_i^n y_{i-1}^n + a_{i+1}^n y_{i+1}^n) + \left(\frac{\rho_i^n}{\tau} - \frac{a_i^n + a_{i+1}^n}{h^2} \right) y_i^n,$$

получаем, что схема монотонна при условиях

$$\frac{\tau(a_i^n + a_{i+1}^n)}{h^2} \leq \rho_i^n; \quad i = 1, 2, \dots, N - 1; \quad n = 0, 1, \dots, K - 1;$$

которые выполняются при $\tau \leq \frac{c_3 h^2}{c_2}$.

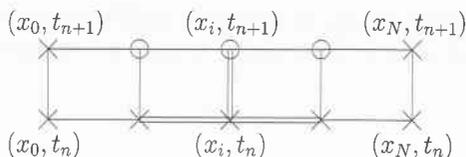


Рис. 2.4. Разностная сетка на соседних временных слоях

Покажем, что монотонность схемы влечет за собой ее устойчивость по начальным данным. Будем предполагать, что граничные условия однородны, то есть $y_0^n = y_N^n = 0$, $t_n \in \omega_\tau$. Рассмотрим два соседних временных слоя t_n и t_{n+1} (см. рис.2.4). Будем считать узлы (x_i, t_{n+1}) , $x_i \in \omega_h$, в которых из уравнения находятся значения y_i^{n+1} , внутренними, а прочие узлы рассматриваемых временных слоев — граничными. В граничных узлах значения сеточной функции y будем считать известными. В случае монотонности схемы можно воспользоваться оценкой устойчивости по граничным условиям для первой краевой задачи (см. третье следствие теоремы 2.4), которая с учетом однородности граничных условий примет вид

$$|y_i^{n+1}| \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} |y_i^n|, \quad x_i \in \omega_h.$$

Отсюда следует условие устойчивости по начальным данным

$$\|y^{n+1}\|_{C(\omega_h)} \leq \|y^n\|_{C(\omega_h)} \leq \dots \leq \|y^0\|_{C(\omega_h)}.$$

Пример 2.4 (Принцип замороженных коэффициентов). Исследуем устойчивость схемы с переменными коэффициентами

$$\rho_i^n \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = (ay_x)_{x,i}^n$$

используя так называемый принцип замороженных коэффициентов.

Будем считать, что коэффициенты ρ_i^n , a_i^n постоянны, то есть

$$\rho_i^n \equiv \rho = \text{const}, \quad a_i^n \equiv a = \text{const}.$$

Тогда уравнение можно записать в виде

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau'} = y_{x,i}^n, \quad \tau' = \frac{a}{\rho} \tau.$$

При рассмотрении примера 2.1 показано, что последнее уравнение устойчиво при $\tau' \leq h^2/2$. В соответствии с принципом замороженных коэффициентов считается, что схема устойчива, если условие выполнено при всех

возможных значениях a_i^n, ρ_i^n , то есть $\tau \leq (\rho_i^n h^2)/(2a_i^n)$. Если известно, что $0 < c_1 \leq a_i^n \leq c_2, \rho_i^n \geq c_3 > 0$, приходим к тому же условию устойчивости

$$\tau \leq \frac{c_3 h^2}{2c_2},$$

что и в предыдущем примере, где это условие строго обосновано.

Пример 2.5 (Разностные схемы для уравнения переноса). Исследуем простейшие явные разностные схемы, аппроксимирующие краевую задачу для уравнения переноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u(0, t) = \mu(t). \end{aligned}$$

Замечание. Решение $u(x, t)$ этой задачи переносится по характеристикам $t = x + \text{const}$, откуда $u(x, t) = u_0(x - t), x > t$ и $u(x, t) = \mu(t - x), x < t$.

В квадранте $x \geq 0, t \geq 0$ введем разностную сетку $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \cup \omega_\tau$:

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \{x_i = ih; i = 0, 1, 2, \dots\}; \\ \omega_\tau &= \{t_n = n\tau; n = 0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

1) Схема с разностью, направленной «против потока». Сопоставим исходной дифференциальной задаче разностную схему

$$\begin{aligned} y_{t,i}^n + y_{x,i}^n &= 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \quad y_0^n = \mu(t_n). \end{aligned}$$

В канонической форме записи основное уравнение примет вид

$$y_i^{n+1} = \gamma y_{i-1}^n + (1 - \gamma) y_i^n, \quad \gamma = \frac{\tau}{h} > 0.$$

Отсюда легко видеть, что схема монотонна при $\tau \leq h$.

Замечание. Показать, что из этого условия следует устойчивость схемы, пользуясь принципом максимума и его следствиями, нельзя, поскольку рассматриваемая сетка имеет бесконечное число узлов. Однако несложно убедиться, что метод гармоник дает то же необходимое условие устойчивости.

2) Схема с разностью, направленной «по потоку». Изменим основное уравнение предыдущей схемы следующим образом:

$$y_{t,i}^n + y_{x,i}^n = 0.$$

В канонической форме записи

$$y_i^{n+1} = (1 + \gamma)y_i^n - \gamma y_{i+1}^n.$$

Отсюда делаем вывод, что схема немонотонна при любых τ и h . Покажем методом гармоник, что схема также абсолютно неустойчива. Подставляя в уравнение частное решение $y_i^n(\varphi) = q^n e^{ih\varphi I}$, получим

$$\frac{q-1}{\tau} + \frac{e^{h\varphi I} - 1}{h} = 0 \Rightarrow q = 1 + \gamma(1 - e^{h\varphi I}),$$

откуда $|q| > 1$ ($h\varphi \neq 2\pi k$).

3) Схема с центральной разностью. Рассмотрим схему второго порядка аппроксимации по пространству, основное уравнение которой имеет вид

$$y_{t,i}^n + y_{x,i}^n = 0.$$

В канонической форме записи

$$y_i^{n+1} = \frac{\gamma}{2}y_{i-1}^n + y_i^n - \frac{\gamma}{2}y_{i+1}^n.$$

Схема немонотонна при любых τ и h и абсолютно неустойчива, поскольку методом гармоник получаем, что

$$\frac{q-1}{\tau} + \frac{e^{h\varphi I} - e^{-h\varphi I}}{2h} = 0 \Rightarrow q = 1 - I\gamma \sin(h\varphi),$$

откуда $|q| > 1$ ($h\varphi \neq \pi k$).

4) Схема с искусственной вязкостью. Модифицируем уравнение предыдущей схемы следующим образом

$$y_{t,i}^n + y_{x,i}^n = h\nu y_{xx,i}^n, \quad (\nu > 0).$$

При этом порядок аппроксимации схемы по пространству понизится до первого.

Замечание. В уравнении Бюргера $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ коэффициент μ характеризует вязкость среды.

Записывая уравнение в индексной форме

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} = h\nu \frac{y_{i-1}^n - 2y_i^n + y_{i+1}^n}{h^2},$$

и приводя к каноническому виду

$$y_i^{n+1} = \gamma \left(\nu + \frac{1}{2} \right) y_{i-1}^n + (1 - 2\gamma\nu) y_i^n + \gamma \left(\nu - \frac{1}{2} \right) y_{i+1}^n,$$

получаем, что схема становится монотонной при условиях:

$$\gamma \leq \frac{1}{2\nu} \leq 1.$$

Замечание. Слагаемые, добавляемые в разностное уравнение (с сохранением аппроксимации), подобные рассмотренному в данном примере, называются *монотонизаторами*.

2.6 Монотонные разностные схемы для уравнений второго порядка, содержащих первые производные

Рассмотрим первую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$u''(x) + r(x)u'(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = u(1) = 0,$$

и зададимся целью построить для нее разностную схему, имеющую второй порядок аппроксимации и монотонную при любых шагах сетки.

Рассмотрим простейшую схему с центральной разностью второго порядка аппроксимации

$$y_{\bar{x},i} + r_i y_{2,i} = -f_i, \quad y_0 = y_N = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1.$$

В канонической форме записи

$$\frac{2}{h^2} y_i = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{r_i}{2h} \right) y_{i-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{r_i}{2h} \right) y_{i+1} + f_i \Rightarrow h \leq \frac{2}{\max_{1 \leq i \leq N-1} |r_i|}$$

— условие монотонности схемы. Тем самым, монотонной при всех h схема будет лишь при $r(x) \equiv 0$.

Далее заметим, что при $r(x) \geq 0$, $x \in (0; 1)$ схема первого порядка с односторонней разностью $y_{\bar{x},i} + r_i y_{x,i} = -f_i$ монотонна для всех h , поскольку в канонической форме

$$\left(\frac{2}{h^2} + \frac{r_i}{h} \right) y_i = \frac{1}{h^2} y_{i-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{r_i}{h} \right) y_{i+1} + f_i.$$

Также легко показать, что при $r(x) \leq 0$, $x \in (0; 1)$ для всех h монотонна схема $y_{\bar{x},i} + r_i y_{\bar{x},i} = -f_i$.

Представим функцию $r(x)$ в виде суммы $r(x) = r_+(x) + r_-(x)$, где

$$r_+(x) = 0,5(r(x) + |r(x)|) \geq 0, \quad r_-(x) = 0,5(r(x) - |r(x)|) \leq 0.$$

Тогда схема первого порядка с направленными разностями

$$y_{\bar{x},i} + r_+(x_i)y_{x,i} + r_-(x_i)y_{\bar{x},i} = -f_i$$

также монотонна для всех h .

Рассмотрим погрешность аппроксимации этой схемы на решении дифференциальной задачи

$$\begin{aligned} \psi_i &= u_{\bar{x},i} + r_+(x_i)u_{x,i} + r_-(x_i)u_{\bar{x},i} + f_i = \\ &= u_i'' + r_+(x_i)(u_i' + 0,5hu_i'') + r_-(x_i)(u_i' - 0,5hu_i'') + f_i + O(h^2) = \\ &= 0,5h(r_+(x_i) - r_-(x_i))u_i'' + O(h^2) = 0,5h|r(x_i)|u''(x_i) + O(h^2) = \\ &= 0,5h|r(x_i)|u_{\bar{x},i} + O(h^2). \end{aligned}$$

Учитывая выражение для погрешности, второй порядок аппроксимации будет иметь схема, модифицированная следующим образом:

$$(1 - 0,5h|r(x_i)|)y_{\bar{x},i} + r_+(x_i)y_{x,i} + r_-(x_i)y_{\bar{x},i} = -f_i.$$

Заметим, что коэффициент

$$(1 - 0,5h|r(x_i)|) = (1 + 0,5h|r(x_i)|)^{-1} + O(h^2),$$

поэтому порядок аппроксимации не уменьшится, если его заменить на коэффициент

$$k_i = (1 + 0,5h|r(x_i)|)^{-1} > 0.$$

Окончательно получим схему второго порядка

$$k_i y_{\bar{x},i} + r_+(x_i)y_{x,i} + r_-(x_i)y_{\bar{x},i} = -f_i.$$

которая в канонической форме записи имеет вид

$$\left(\frac{2k_i}{h^2} + \frac{|r(x_i)|}{h} \right) y_i = \left(\frac{k_i}{h^2} - \frac{r_-(x_i)}{h} \right) y_{i-1} + \left(\frac{k_i}{h^2} + \frac{r_+(x_i)}{h} \right) y_{i+1} + f_i,$$

откуда легко видеть, что схема монотонна при любых h .

Замечание. Аналогично строятся схемы для уравнений в частных производных. Например, для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

монотонной при любых τ и h является чисто неявная схема

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = k_i y_{\bar{x},i}^{n+1} + r_+(x_i) y_{x,i}^{n+1} + r_-(x_i) y_{\bar{x},i}^{n+1},$$

имеющая порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

2.7 Задачи к главе 2

Задача 2.1. Доказать, что разностная задача

$$\begin{aligned}y_{\bar{x}x,i} + r_i y_{\bar{x},i} &= -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1; \\y_0 = y_N &= 0; \quad |r_i| \leq R;\end{aligned}$$

имеет единственное решение при условии $h < 2/R$.

Задача 2.2. Выполнены ли условия принципа максимума для разностной задачи

$$\begin{aligned}y_{\bar{x}x,i} &= -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1; \quad hN = 1; \\y_{x,0} = y_{\bar{x},2N} &= 0; \quad y_N = 0.\end{aligned}$$

Ответ: Нет. Условия выполняются на сеточных подмножествах

$$\begin{aligned}\Omega_{1h} &= \{x_i; i = 0, 1, \dots, N\}; \\ \Omega_{2h} &= \{x_i; i = N, N+1, \dots, 2N\}.\end{aligned}$$

Задача 2.3. Построить решение дифференциальной задачи

$$\begin{aligned}u''(x) &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 1 < x < 2; \\ u'(0) = \alpha_1, \quad u'(2) = \alpha_2, \quad u(1) &= \beta;\end{aligned}$$

и аппроксимирующей ее разностной схемы

$$\begin{aligned}y_{\bar{x}x,i} &= 0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1; \quad hN = 1; \\ y_{x,0} = \alpha_1, \quad y_{\bar{x},2N} = \alpha_2, \quad y_N &= \beta.\end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned}u(x) &= \begin{cases} \beta + \alpha_1(x-1), & 0 \leq x \leq 1; \\ \beta + \alpha_2(x-1), & 1 \leq x \leq 2; \end{cases} \\ u(x_i) &= \begin{cases} \beta + \alpha_1(x_i-1), & i = 0, 1, \dots, N; \\ \beta + \alpha_2(x_i-1), & i = N, N+1, \dots, 2N; \end{cases}\end{aligned}$$

Замечание. Схема дает точное решение в узлах сетки, поскольку ее погрешность аппроксимации на гладких решениях дифференциальной задачи равна нулю. В этом несложно убедиться, учитывая, что из исходного дифференциального уравнения вытекает равенство нулю всех производных порядка выше первого на $[0; 2]$.

Задача 2.4. При каких условиях справедлив принцип максимума для разностной схемы

$$y_{\bar{x},i} + x_i^2 y_{\bar{x},i} + (1 - x_i^2) y_{x,i} = -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1; \\ y_0 = y_N = 0.$$

Ответ: Все условия принципа максимума выполнены при любых h .

Задача 2.5. При каких условиях справедлив принцип максимума для разностной схемы

$$y_{x_1 x_1, ij} + y_{x_2 x_2, ij} + c_1 x_{1,i}^2 y_{x_1, ij}^o + c_2 x_{2,j}^2 y_{x_2, ij}^o = -f_{ij}, \\ 0 < x_{1,i} < 1, \quad 0 < x_{2,j} < 1.$$

Замечание. Здесь и в последующих примерах, где это не вызывает недоразумений, полная постановка разностной задачи не приводится.

Ответ: $h_1 \leq 2/|c_1|$, $h_2 \leq 2/|c_2|$.

Задача 2.6. Исследовать монотонность схемы

$$y_{\bar{t},i}^n = y_{\bar{x},i}^n.$$

Ответ: Немонотонна при любых τ и h .

Задача 2.7. Какое уравнение и с какой погрешностью аппроксимирует разностная схема

$$y_{\bar{t},i}^n = \sigma y_{\bar{x},i}^{n+1} + (1 - 2\sigma) y_{\bar{x},i}^n + \sigma y_{\bar{x},i}^{n-1}.$$

Является ли схема монотонной?

Ответ: Схема аппроксимирует уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с порядком $O(\tau^2 + h^2)$ и немонотонна для любых τ , h и σ .

Задача 2.8. На прямоугольной сетке с шагами h_1 и h_2 , используя девятиточечный шаблон, построить разностную схему четвертого порядка аппроксимации для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0.$$

Найти условия на шаги сетки, при которых справедлив принцип максимума.

Ответ: Схема четвертого порядка

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2, ij} = 0$$

монотонна при $1/\sqrt{5} \leq h_1/h_2 \leq \sqrt{5}$.

Задача 2.9. Аппроксимировать со вторым порядком уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

и выяснить условия, при которых справедлив принцип максимума.

Ответ: Простейшая схема второго порядка

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} - y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = 0$$

немонотонна при любых h_1, h_2 . Для схемы с монотонизатором

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} - y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = -\nu h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2, ij}$$

справедлив принцип максимума при условиях:

$$\frac{1}{2} \leq 2\nu \leq 1, \quad 2\nu \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \frac{1}{2\nu}.$$

Задача 2.10. Построить монотонную разностную схему второго порядка аппроксимации для задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2) = 0, \quad 0 < x_2 < l_2;$$

$$u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial G \setminus \{x_1 = 0, 0 < x_2 < l_2\}.$$

Ответ:

$$x_{ij} = (x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2; \quad h_1 N_1 = l_1, \quad h_2 N_2 = l_2;$$

$$\omega_{1h} = \{x_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\};$$

$$\omega_{2h} = \{x_{0j}; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\};$$

$$\gamma_h = \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{N_1 j}; \quad i = 0, 1, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}.$$

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = -f_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_{1h};$$

$$y_{x_1, ij} = -0.5h_1(y_{\bar{x}_2 x_2} + f)_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_{2h};$$

$$y_{ij} = 0, \quad x_{ij} \in \gamma_h.$$

Глава 3

Методы решения сеточных уравнений

3.1 Модельная задача

3.1.1 Оператор разностной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике

Методы решения двумерных разностных краевых задач будем иллюстрировать на примере разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для уравнения Пуассона с однородными граничными условиями в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x), & x = (x_1, x_2) \in G; \\ u(x) = 0, & x \in \partial G; \end{cases}$$

где, как и ранее, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа.

Как и в главе 2, введем в $\bar{G} = G + \partial G$ равномерную разностную сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= (x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2; \quad h_1 N_1 = l_1, \quad h_2 N_2 = l_2; \\ \omega_h &= \{x_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}; \\ \gamma_h &= \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1 j}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}; \end{aligned}$$

и рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}), & x_{ij} \in \omega_h; \\ y_{ij} = 0, & x_{ij} \in \gamma_h. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь, как и ранее, $\Delta_h y_{ij} = (y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij}$ — пятиточечный разностный оператор Лапласа.

Замечание. Разностная схема (3.1) представляет собой систему $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ линейных алгебраических уравнений с тем же числом неизвестных относительно неизвестной сеточной функции y .

Задача (3.1) порождает линейный оператор A , который определяется следующим образом:

$$Ay_{ij} = -\Delta_h y_{ij} = -(y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y|_{\gamma_h} = 0.$$

Введем конечномерное линейное пространство

$$H = \{y(x_{ij}); x_{ij} \in \Omega_h, y|_{\gamma_h} = 0\}$$

сеточных функций, определенных на сетке Ω_h и обращающихся в нуль на γ_h , размерности $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$. Определим в H скалярное произведение и норму

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2; \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}; \quad y, v \in H.$$

Разностная задача (3.1) может быть записана в виде

$$Ay = f; \quad y, f \in H; \quad A: H \rightarrow H.$$

Наша дальнейшая цель — установить свойства оператора A во введенном пространстве H .

Лемма 3.1 (Разностный аналог формулы интегрирования по частям). Для произвольных функций y и v , заданных на равномерной сетке с шагом h , справедливо тождество

$$\sum_{i=1}^N y_{\bar{x}, i} v_i h = y_N v_N - y_0 v_0 - \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_{x, i} h.$$

▼ Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N y_{\bar{x}, i} v_i h &= \sum_{i=1}^N y_i v_i - \sum_{i=1}^N y_{i-1} v_i = y_N v_N - y_0 v_0 + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_i - \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_{i+1} = y_N v_N - y_0 v_0 - \sum_{i=0}^{N-1} y_i v_{x, i} h. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Следствие. Поменяв ролями y и v , получим

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_{x_i} v_i h = y_N v_N - y_0 v_0 - \sum_{i=1}^N y_i v_{\bar{x}_i} h,$$

откуда $\sum_{i=1}^{N-1} y_{x_i} v_i h = - \sum_{i=1}^N y_i v_{\bar{x}_i} h$ при $v_0 = v_N = 0$.

Лемма 3.2 (Разностный аналог формулы Грина). Для любых $u, v \in H$ верно равенство

$$(Ay, v) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_1} v_{\bar{x}_1})_{ij} h_1 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} (y_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_2})_{ij} h_1 h_2.$$

▼ Доказательство.

$$\begin{aligned} (Ay, v) &= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_1} v)_{ij} h_1 h_2 - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_2} v)_{ij} h_2 h_1 = \\ &= - \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 \sum_{i=1}^{N_1-1} (y_{\bar{x}_1} v)_{ij} h_1 - \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_2} v)_{ij} h_2 = \end{aligned}$$

(в силу следствия леммы 3.1, учитывая, что $v|_{\gamma_h} = 0$)

$$= \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 \sum_{i=1}^{N_1} (y_{\bar{x}_1} v_{\bar{x}_1})_{ij} h_1 + \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2} (y_{\bar{x}_2} v_{\bar{x}_2})_{ij} h_2.$$

▲ Утверждение доказано.

Теорема 3.1 ($A^* = A > 0$). Оператор A является самосопряженным и положительно определенным в пространстве H .

▼ Доказательство. В силу леммы 3.2 $(Ay, v) = (Av, y) = (y, Av)$ для любых $y, v \in H$, откуда $A^* = A$. Кроме того,

$$(Ay, y) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2-1} y_{\bar{x}_1, ij}^2 h_1 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} y_{\bar{x}_2, ij}^2 h_1 h_2, \quad \forall y \in H,$$

откуда $(Ay, y) \geq 0$. Предполагая равенство $(Ay, y) = 0$, получим

$$y_{\bar{x}_1, ij} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N_1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1; \quad (y|_{\gamma_h} = 0) \Rightarrow$$

$$y_{N_1j} = y_{N_1-1j} = \dots = y_j = y_0 = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1 \Rightarrow y|_{\Omega_h} = 0.$$

Отсюда $(Ay, y) > 0$ для всех $y \neq 0$ из H .

▲ Утверждение доказано.

Следствие. Собственные значения оператора A действительны и, более того, положительны. Собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Для нахождения собственных значений и собственных функций оператора A сначала рассмотрим одномерный оператор

$$A^{(1)}y_i = -y_{\bar{x}x,i}; \quad i = 1, 2, \dots, N - 1; \quad y_0 = y_N = 0;$$

действующий в пространстве

$$H^{(1)} = \{y(x_i); x_i \in \Omega_h^{(1)}, y_0 = y_N = 0\};$$

$$\Omega_h^{(1)} = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; hN = l\};$$

со скалярным произведением и нормой

$$(y, v)_{H^{(1)}} = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h; \quad \|y\|_{H^{(1)}} = \sqrt{(y, y)_{H^{(1)}}}; \quad y, v \in H^{(1)}.$$

Замечание ($A^{*(1)} = A^{(1)} > 0$). Самосопряженность и положительная определенность оператора $A^{(1)}$ доказывается так же, как в теореме 3.1.

Рассмотрим задачу на собственные значения оператора $A^{(1)}$:

$$y_{\bar{x}x,i} + \lambda y_i = 0; \quad y_0 = y_N = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N - 1; \quad hN = l.$$

Лемма 3.3. Собственные значения и собственные функции оператора $A^{(1)}$ имеют вид:

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2N}; \quad y_{k,i} = \sin \frac{\pi k i}{N}; \quad k = 1, 2, \dots, N - 1; \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

▼ Доказательство. По аналогии с соответствующей дифференциальной задачей на собственные значения будем искать решение в виде

$$y_i = \sin(\alpha i); \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Подставляя $y_i = \sin(\alpha i)$ в уравнение

$$y_{i-1} - 2(1 - \lambda h^2/2)y_i + y_{i+1} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N - 1;$$

получим $2 \sin(\alpha i) \cos \alpha - 2(1 - \lambda h^2/2) \sin(\alpha i) = 0$, откуда

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\lambda h^2}{2}, \quad \lambda = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку $y_0 = \sin(\alpha 0) = 0$, осталось учесть граничное условие $y_N = 0$:

$$\sin(\alpha N) = 0 \Rightarrow \alpha_k = \pi k/N; \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

▲ Утверждение доказано.

Следствие. Собственные значения λ_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ оператора $A^{(1)}$ различны и положительны, а отвечающие им собственные функции y_k образуют ортогональный базис в пространстве $H^{(1)}$.

Лемма 3.4. Собственные функции оператора $A^{(1)}$

$$\mu_k(x_i) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k i}{N} = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k x_i}{l}; \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \quad i = 0, 1, \dots, N$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $H^{(1)}$.

▼ Доказательство. В силу ортогональности собственных функций y_k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ достаточно найти нормировочный множитель. Используя обозначение $\alpha_k = \pi k/N$, получим

$$\begin{aligned} (y_k, y_k)_{H^{(1)}} &= \sum_{i=1}^{N-1} \sin^2(\alpha_k i) h = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (1 - \cos(2\alpha_k i)) = \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(1 - \frac{\sin(2\alpha_k(i+1/2)) - \sin(2\alpha_k(i-1/2))}{2 \sin \alpha_k} \right) = \\ &= \frac{h}{2} \left(N-1 - \frac{\sin(2\alpha_k(N-1/2)) - \sin \alpha_k}{2 \sin \alpha_k} \right) = \frac{hN}{2} = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Лемма 3.5 (Оценка спектра оператора $A^{(1)}$).

$$\frac{9}{l^2} \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1} < \frac{4}{h^2}.$$

▼ Доказательство. Неравенства $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, N-2$) являются следствием возрастания синуса на $(0; \pi/2)$.

$$\lambda_{\max} = \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi(N-1)}{2N} < \frac{4}{h^2}.$$

Вводя обозначение $\alpha = \pi/(2N)$ и учитывая, что $hN = l$, получим

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{2N} = \frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \geq \frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{61}{\pi^2} \right)^2 = \frac{9}{l^2}.$$

Здесь учтено, что $\alpha \leq \pi/6$, поскольку без ограничения общности можно считать $N \geq 3$, а также убывание функции $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ на $[0; \pi/6]$.

▲ Утверждение доказано.

Далее рассмотрим задачу на собственные значения оператора A :

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} + \lambda y_{ij} = 0, \quad x_{ij} \in \omega_h;$$

$$y_{ij} = 0, \quad x_{ij} \in \gamma_h.$$

Теорема 3.2. *Собственные значения и собственные функции оператора A имеют вид:*

$$\lambda_k = \lambda_{k_1 k_2} = \lambda_{1, k_1} + \lambda_{2, k_2};$$

$$\mu_k = \mu_{k_1 k_2}(x_{ij}) = \mu_{1, k_1}(x_{1, i}) \mu_{2, k_2}(x_{2, j});$$

$$\lambda_{1, k_1} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi k_1 h_1}{2l_1}; \quad \mu_{1, k_1}(x_{1, i}) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin \frac{\pi k_1 x_{1, i}}{l_1}; \quad i = 0, 1, \dots, N_1;$$

$$\lambda_{2, k_2} = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi k_2 h_2}{2l_2}; \quad \mu_{2, k_2}(x_{2, j}) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{\pi k_2 x_{2, j}}{l_2}; \quad j = 0, 1, \dots, N_2;$$

$$k_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad k_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

▼ Доказательство. Достаточно подставить указанные функции в уравнение задачи на собственные значения оператора A и учесть выражения для собственных значений и собственных функций одномерного оператора $A^{(1)}$, полученные в лемме 3.3.

▲ Утверждение доказано.

Следствие. *Собственные функции μ_k оператора A образуют ортонормированный базис в пространстве H (см. лемму 3.4).*

Теорема 3.3 (Оценка спектра оператора A).

$$\frac{9}{l_1^2} + \frac{9}{l_2^2} \leq \lambda_k < \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}.$$

▼ Доказательство. Учитывая утверждение леммы 3.5,

$$\gamma_1 = \lambda_{\min}(A) = \lambda_{11} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi h_2}{2l_2} \geq \frac{9}{l_1^2} + \frac{9}{l_2^2},$$

$$\gamma_2 = \lambda_{\max}(A) = \lambda_{N_1-1 N_2-1} = \frac{4}{h_1^2} \cos^2 \frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_2^2} \cos^2 \frac{\pi h_2}{2l_2} < \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}.$$

▲ Утверждение доказано.

3.1.2 Модельная задача и ее свойства

Модельной задачей далее будем называть частный случай задачи (3.1) в квадрате $G = \{0 < x_1, x_2 < 1\}$, на сетке Ω_h с шагами $h_1 = h_2 = h = 1/N$:

$$\frac{y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j}}{h^2} + \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h^2} = -f_{ij}; \quad (3.2)$$
$$y_{i0} = y_{iN} = y_{0j} = y_{Nj} = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1.$$

На этом примере хорошо видны следующие характерные особенности систем уравнений, возникающих при аппроксимации многомерных задач математической физики.

1) Высокий порядок матрицы. Порядок системы (3.2) совпадает с количеством внутренних узлов сетки Ω_h и равен $(N-1)^2$. В частности, когда шаг сетки h равен характерному значению 0,01, порядок — почти 10000.

2) Сильная разреженность матрицы. Каждое уравнение системы (3.2) содержит не более пяти отличных от нуля коэффициентов. Тем самым отношение числа ненулевых элементов матрицы системы к общему числу ее элементов не превосходит $5/(N-1)^2 = O(h^2)$.

3) Большой разброс собственных значений.

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)} = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2} = O(h^2).$$

Замечание. Величина $\|A\| \|A^{-1}\|$, для системы (3.2) равная $\xi^{-1} = O(N^2)$, называется числом обусловленности. При больших числах обусловленности системы называют плохо обусловленными, и, как будет показано далее, явные итерационные методы решения таких систем сходятся медленно.

3.2 Оценки скорости сходимости стационарных итерационных методов

3.2.1 Скорость сходимости итерационного метода

Будем рассматривать систему линейных алгебраических уравнений

$$Ay = f, \quad (3.3)$$

где A — квадратная невырожденная матрица порядка m , y — искомый вектор размерности m , f — заданный вектор той же размерности.

Остановимся сначала на общей характеристике понятия итерационного метода. В любом итерационном методе решения уравнения (3.3) исходят из некоторого начального приближения y_0 и последовательно определяют приближенные решения $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots$, где n — номер итерации.

Приближение y_{n+1} выражается через известные предыдущие приближения по рекуррентной формуле $y_{n+1} = F_{n+1}(y_0, y_1, \dots, y_n)$, где F_{n+1} — некоторая функция, в общем случае зависящая от матрицы A , правой части f и номера итерации n .

Определение. Итерационный метод называется *k-шаговым* (методом *k-го* порядка), если каждое последующее приближение зависит лишь от *k* предыдущих, то есть $y_{n+1} = F_{n+1}(y_{n-k+1}, y_{n-k+2}, \dots, y_n)$.

Замечание. На практике в основном используются одношаговые или двухшаговые итерационные методы.

Определение. Итерационный метод называется *линейным*, если функция F_{n+1} линейная.

Определение. Итерационный метод называется *стационарным*, если функция F_{n+1} не зависит от номера итерации n .

Рассмотрим общий вид линейного одношагового итерационного метода:

$$y_{n+1} = S_{n+1}y_n + \varphi_{n+1}; \quad n = 0, 1, \dots;$$

где S_{n+1} — матрицы порядка m , φ_{n+1} — векторы размерности m . Естественно потребовать, чтобы точное решение $y = A^{-1}f$ уравнения (3.3) являлось неподвижной точкой итерационного процесса, то есть при всех $n = 0, 1, \dots$ выполнялось равенство

$$A^{-1}f = S_{n+1}A^{-1}f + \varphi_{n+1} \Leftrightarrow \varphi_{n+1} = (A^{-1} - S_{n+1}A^{-1})f.$$

Обозначим $C_{n+1} = A^{-1} - S_{n+1}A^{-1}$, тогда $S_{n+1} = E - C_{n+1}A$, а уравнение итерационного метода примет вид

$$y_{n+1} = (E - C_{n+1}A)y_n + C_{n+1}f.$$

Предполагая существование матрицы обратной к C_{n+1} , перепишем уравнение в виде

$$C_{n+1}^{-1}(y_{n+1} - y_n) + Ay_n = f.$$

Для дальнейшего исследования метода удобно ввести числовые итерационные параметры $\tau_{n+1} > 0$ и матрицы $B_{n+1} = \tau_{n+1}C_{n+1}^{-1}$. Тогда требование существования матрицы C_{n+1}^{-1} равносильно существованию обратной матрицы к B_{n+1} . Приходим к так называемой канонической форме записи итерационного метода.

Определение. Каноническим видом одношагового итерационного метода решения системы (3.3) называется его запись в форме

$$B_{n+1} \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau_{n+1}} + Ay_n = f; \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.4)$$

Определение. Если B_{n+1} — единичные матрицы ($B_{n+1} = E$), то итерационный метод (3.4) называется *явным*, в противном случае — *неявным*.

Определение. Стационарным одношаговым итерационным методом решения системы (3.3) называется метод вида

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f; \quad n = 0, 1, \dots; \quad (3.5)$$

где B и τ не зависят от номера итерации n .

Решение y системы (3.3) и последовательные приближения y_n можно рассматривать как элементы линейного конечномерного пространства H , а матрицы A и B — как линейные операторы, действующие в H . Будем предполагать, что в H определены скалярное произведение (y, v) и норма $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Замечание. Напомним, что неравенство $A > 0$ — положительная определенность матрицы означает, что $(Av, v) > 0$ при всех $v \in H, v \neq 0$. Из неравенства $A > 0$ следует существование числа $\delta > 0$ такого, что $(Av, v) \geq \delta \|v\|^2$. Матричное неравенство $A > B$ означает, что матрица $A - B$ положительно определена.

Определение. Итерационный метод (3.5) сходится, если $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 3.4 (А.А.Самарского). Пусть $A^T = A > 0, \tau > 0$ и $B > \frac{\tau}{2}A$. Тогда итерационный метод (3.5) сходится.

▼ **Доказательство.** Рассмотрим погрешность $z_n = y_n - y$ на n -ой итерации, удовлетворяющую однородному уравнению

$$B \frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + Az_n = 0; \quad n = 0, 1, \dots; \quad z_0 = y_0 - y.$$

Из этого уравнения с учетом положительной определенности матрицы B , а, следовательно, и существования обратной матрицы B^{-1} , находим

$$z_{n+1} = (E - \tau B^{-1}A)z_n; \quad Az_{n+1} = (A - \tau AB^{-1}A)z_n.$$

Учитывая симметричность матрицы A , получим

$$(Az_{n+1}, z_{n+1}) = (Az_n, z_n) - \tau(AB^{-1}Az_n, z_n) - \tau(Az_n, B^{-1}Az_n) +$$

$$\begin{aligned}
& +\tau^2(AB^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n) = \\
& = (Az_n, z_n) - 2\tau((B - 0,5\tau A)B^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n).
\end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $B - 0,5\tau A > 0$, имеем

$$0 \leq \alpha_{n+1} = (Az_{n+1}, z_{n+1}) \leq (Az_n, z_n) = \alpha_n,$$

то есть числовая последовательность α_n не возрастает и ограничена снизу, а значит, сходится. Далее, учитывая, что

$$((B - 0,5\tau A)B^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n) \geq \delta \|B^{-1}Az_n\|^2,$$

приходим к неравенству

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n + 2\tau\delta \|B^{-1}Az_n\|^2 \leq 0,$$

откуда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\| = 0, \text{ где } w_n = B^{-1}Az_n.$$

В силу существования обратной матрицы A^{-1} имеем

$$z_n = A^{-1}Bw_n \Rightarrow \|z_n\| \leq \|A^{-1}B\| \|w_n\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n\| = 0.$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. При практическом использовании итерационных методов важен не только факт сходимости, но и скорость, с которой приближенное решение сходится к точному.

Определение. Итерационный метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q \in (0, 1)$, если $\|y_n - y\| \leq q^n \|y_0 - y\|$.

Замечание. Пусть $\varepsilon > 0$. Уменьшение погрешности в $1/\varepsilon$ раз означает, что $\|y_n - y\| \leq \varepsilon \|y_0 - y\|$. Для этого достаточно выполнения неравенства

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/q)},$$

равносильного неравенству $q^n \leq \varepsilon$.

Определение. Целая часть числа $n_0(\varepsilon)$ называется минимальным числом итераций, необходимым для достижения заданной точности ε .

Определение. Выражение $\ln(1/q)$ называется скоростью сходимости итерационного метода.

Замечание. Скорость сходимости определяется исключительно свойствами матрицы перехода $S = E - \tau B^{-1}A$ и не зависит ни от номера итерации n , ни от выбора начального приближения y_0 , ни от задаваемой точности ε .

3.2.2 Правила действий с матричными неравенствами

Лемма 3.6. Если A — вещественная симметричная матрица (то есть $A^T = A$), то существует ортогональная матрица Q (то есть $Q^T = Q^{-1}$) такая, что $A = Q^T \Lambda Q$, где $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные значения матрицы A .

(Доказательство см., например, в книге [5]).

Лемма 3.7. Если $A^T = A$, то неравенство $A \geq 0$ ($A > 0$) эквивалентно неотрицательности (положительности) всех ее собственных значений.

▼ Доказательство.

1) Пусть $A\mu_k = \lambda_k \mu_k$; $k = 1, 2, \dots, m$. Предполагая, что $A \geq 0$, получим

$$0 \leq (A\mu_k, \mu_k) = \lambda_k (\mu_k, \mu_k) \Rightarrow \lambda_k \geq 0.$$

2) Предполагая, что $\lambda_k \geq 0$, в силу леммы 3.6 получим для любого $v \in H$

$$(Av, v) = (Q^T \Lambda Qv, v) = (\Lambda Qv, Qv) = \sum_{k=1}^m \lambda_k w_k^2 \geq 0, \text{ где } w = Qv.$$

▲ Утверждение доказано.

Лемма 3.8. Если $A^T = A > 0$, то существует $A^{-1} > 0$.

▼ Доказательство. Согласно лемме 3.7 все собственные значения λ_k матрицы A положительны, следовательно, $\det A \neq 0$ и существует матрица A^{-1} , положительность которой следует из положительности всех ее собственных значений λ_k^{-1} ($A\mu_k = \lambda_k \mu_k \Leftrightarrow A^{-1}\mu_k = \lambda_k^{-1} \mu_k$).

▲ Утверждение доказано.

Лемма 3.9. Для симметричной матрицы A и любого числа $\rho > 0$ матричные неравенства $-\rho E \leq A \leq \rho E$ и $A^2 \leq \rho^2 E$ эквивалентны.

▼ Доказательство. Пусть λ_k — собственные значения матрицы A . Рассмотрим матрицу $B = \rho E - A$, где $B^T = B \geq 0$. В силу леммы 3.7 последнее неравенство равносильно неотрицательности собственных значений $b_k = \rho - \lambda_k$ матрицы B , отсюда $\lambda_k \leq \rho$. Аналогично показывается, что $\lambda_k \geq -\rho$. Тем самым неравенства $-\rho E \leq A \leq \rho E$ и $\lambda_k^2 \leq \rho^2$ равносильны. Поскольку λ_k^2 являются собственными числами матрицы A^2 ($A\mu_k = \lambda_k \mu_k \Rightarrow A^2 \mu_k = \lambda_k^2 \mu_k$), рассматривая матрицу $C = \rho^2 E - A^2$, собственные значения которой $\rho^2 - \lambda_k^2 \geq 0$, приходим к равносильному неравенству $A^2 \leq \rho^2 E$.

▲ Утверждение доказано.

Лемма 3.10. Если $A^T = A \geq 0$ ($A > 0$), то существует матрица B такая, что $B^2 = A$, $B^T = B \geq 0$ ($B > 0$).

▼ Доказательство. Пусть λ_k — собственные числа матрицы A , $k = 1, 2, \dots, m$. Согласно леммам 3.6, 3.7 существует матрица Q такая, что $A = Q^T \Lambda Q$, $Q^T = Q^{-1}$, где $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$, $\lambda_k \geq 0$. Определим матрицу $\Lambda^{1/2}$ как $\Lambda^{1/2} = \text{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_m}]$. Тогда матрица $B = Q^T \Lambda^{1/2} Q$ обладает свойствами, указанными в формулировке леммы:

$$B^2 = Q^T \Lambda^{1/2} Q Q^T \Lambda^{1/2} Q = Q^T \Lambda Q = A;$$

$$B^T = (Q^T \Lambda^{1/2} Q)^T = Q^T (Q^T \Lambda^{1/2})^T = Q^T \Lambda^{1/2} Q = B;$$

$$(Bv, v) = (\Lambda^{1/2} Qv, Qv) = \sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda_k} w_k^2 \geq 0 \quad \forall v \in H, \text{ где } w = Qv.$$

▲ Утверждение доказано.

Определение. Матрица B из утверждения предыдущей леммы называется квадратным корнем матрицы A ($A^T = A \geq 0$) и обозначается $A^{1/2}$.

Замечание. Если $B = A^{1/2}$ ($A > 0$), то $(A^{-1})^{1/2} = B^{-1}$, поскольку

$$(B^{-1})^2 A = B^{-1} B^{-1} B B = E \Rightarrow (B^{-1})^2 = A^{-1};$$

$$(B^{-1})^T B = (B^{-1})^T B^T = (B B^{-1})^T = E \Rightarrow (B^{-1})^T = B^{-1}.$$

То есть, если $A > 0$, то существует $(A^{-1})^{1/2} = (A^{1/2})^{-1}$. Матрица $(A^{-1})^{1/2}$ обозначается как $A^{-1/2}$.

Лемма 3.11. Пусть $A^T = A$ и C — невырожденная матрица. Тогда неравенства $A \geq 0$ ($A > 0$) и $C^T A C \geq 0$ ($C^T A C > 0$) эквивалентны.

▼ Доказательство.

1) Если $A \geq 0$, для любого $v \in H$ имеем $(C^T A C v, v) = (A C v, C v) \geq 0$, так как $C v \in H$. Значит $C^T A C \geq 0$.

2) Пусть теперь $C^T A C \geq 0$. Так как C^{-1} существует, любой элемент $v \in H$ можно представить в виде $v = C w$, где $w = C^{-1} v$. Тогда $(A v, v) = (A C w, C w) = (C^T A C w, w) \geq 0$, то есть $A \geq 0$.

▲ Утверждение доказано.

Лемма 3.12. Пусть $A^T = A$, $B^T = B$ и C — невырожденная матрица. Тогда неравенства $A \geq B$ ($A > B$) и $C^T A C \geq C^T B C$ ($C^T A C > C^T B C$) эквивалентны.

▼ Доказательство. Согласно лемме 3.11

$$A - B \geq 0 \Leftrightarrow C^T(A - B)C \geq 0 \Leftrightarrow C^TAC \geq C^TBC.$$

▲ Утверждение доказано.

Лемма 3.13. Пусть $A^T = A > 0$, α и β — произвольные вещественные числа. Тогда неравенства $\alpha A \geq \beta E$ и $\alpha E \geq \beta A^{-1}$ эквивалентны.

▼ Доказательство. Согласно лемме 3.10 существуют матрицы $A^{1/2} = (A^{1/2})^T > 0$, $A^{-1/2} = (A^{-1/2})^T > 0$. Используя лемму 3.12, получим

$$\begin{aligned} \alpha A \geq \beta E &\Leftrightarrow \alpha A^{-1/2}AA^{-1/2} \geq \beta A^{-1/2}EA^{-1/2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha A^{-1/2}A^{1/2}A^{1/2}A^{-1/2} \geq \beta A^{-1} \Leftrightarrow \alpha E \geq \beta A^{-1}. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Лемма 3.14. Пусть $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$, α и β — произвольные вещественные числа. Тогда неравенства $\alpha A \geq \beta B$ и $\alpha B^{-1} \geq \beta A^{-1}$ эквивалентны.

▼ Доказательство. Используя леммы 3.12, 3.13, получим

$$\begin{aligned} \alpha A \geq \beta B &\Leftrightarrow \alpha B^{-1/2}AB^{-1/2} \geq \beta E \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha E \geq \beta (B^{-1/2}AB^{-1/2})^{-1} \Leftrightarrow \alpha E \geq \beta B^{1/2}A^{-1}B^{1/2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha B^{-1/2}EB^{-1/2} \geq \beta A^{-1} \Leftrightarrow \alpha B^{-1} \geq \beta A^{-1}. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Утверждения, аналогичные доказанным в этом пункте, справедливы для линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве H . При этом под C^T следует понимать оператор, сопряженный оператору C .

3.2.3 Оценки скорости сходимости в случае симметричных матриц A и B

Пусть, как и ранее, y — точное решение задачи (3.3), а y_n — приближенное решение, полученное в результате реализации итерационного метода (3.5). Рассмотрим погрешность $z_n = y_n - y$ на n -ой итерации, удовлетворяющую однородному уравнению

$$B \frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} + Az_n = 0; \quad n = 0, 1, \dots; \quad z_0 = y_0 - y;$$

откуда получим

$$z_{n+1} = Sz_n, \quad S = E - \tau B^{-1}A.$$

Определение. Пусть $A^T = A > 0$, тогда энергетической (операторной) нормой в пространстве H называется функционал $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}$.

Замечание. $\|y\|_A = \sqrt{(A^{1/2}y, A^{1/2}y)} = \|A^{1/2}y\|$.

Лемма 3.15. Пусть $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$, $\rho > 0$ — вещественное число, тогда неравенства

$$\frac{1-\rho}{\tau}B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau}B$$

необходимы и достаточны для того, чтобы при любых $z_0 \in H$ для погрешности выполнялась оценка

$$\|z_{n+1}\|_A \leq \rho \|z_n\|_A; \quad n = 0, 1, \dots$$

▼ Доказательство. Обозначим $v_n = A^{1/2}z_n$, тогда

$$v_{n+1} = A^{1/2}z_{n+1} = A^{1/2}S z_n = A^{1/2}S A^{-1/2}v_n = \tilde{S}v_n,$$

где $\tilde{S} = E - \tau C$, $C = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$, $C^T = C > 0$. Учитывая леммы, доказанные в предыдущем пункте, получим

$$\begin{aligned} \|z_{n+1}\|_A \leq \rho \|z_n\|_A &\Leftrightarrow \|v_{n+1}\| \leq \rho \|v_n\| \Leftrightarrow (\tilde{S}^2 v_n, v_n) \leq \rho^2 (v_n, v_n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \tilde{S}^2 \leq \rho^2 E \Leftrightarrow -\rho E \leq \tilde{S} \leq \rho E \Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}E \leq C \leq \frac{1+\rho}{\tau}E \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}C^{-1} \leq E \leq \frac{1+\rho}{\tau}C^{-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}A^{-1/2}BA^{-1/2} \leq E \leq \frac{1+\rho}{\tau}A^{-1/2}BA^{-1/2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}B \leq A^{1/2}EA^{1/2} \leq \frac{1+\rho}{\tau}B. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Лемма 3.16. При условиях леммы 3.15 справедлива оценка

$$\|z_{n+1}\|_B \leq \rho \|z_n\|_B; \quad n = 0, 1, \dots$$

▼ Доказательство. Обозначив $v_n = B^{1/2}z_n$, получим, что $v_{n+1} = \tilde{S}v_n$, где $\tilde{S} = E - \tau C$, $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$. Далее аналогично предыдущему доказательству

$$\begin{aligned} \|z_{n+1}\|_B \leq \rho \|z_n\|_B &\Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}E \leq C \leq \frac{1+\rho}{\tau}E \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1-\rho}{\tau}B^{1/2}EB^{1/2} \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau}B^{1/2}EB^{1/2}. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Теорема 3.5. Пусть $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$, $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$, где γ_1, γ_2 — вещественные числа такие, что $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$. Тогда при $\tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ итерационный метод (3.5) сходится и для погрешности справедливы оценки

$$\|z_n\|_A \leq \rho^n \|z_0\|_A; \|z_n\|_B \leq \rho^n \|z_0\|_B; n = 1, 2, \dots;$$

$$\text{где } \rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

▼ Доказательство. В неравенстве $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$ положим

$$\gamma_1 = \frac{1 - \rho}{\tau}, \quad \gamma_2 = \frac{1 + \rho}{\tau} \Leftrightarrow \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Тогда неравенство примет вид

$$\frac{1 - \rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1 + \rho}{\tau} B.$$

Согласно леммам 3.15, 3.16 неравенство равносильно оценкам погрешности

$$\|z_{n+1}\|_A \leq \rho \|z_n\|_A; \|z_{n+1}\|_B \leq \rho \|z_n\|_B; n = 0, 1, \dots$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Как уже отмечалось, матрицы A и B иногда удобно рассматривать как линейные операторы, действующие в линейном конечномерном пространстве H . В этом случае требования $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$ означают самосопряженность и положительную определенность операторов A и B , то есть $A^* = A > 0$, $B^* = B > 0$.

Замечание. Предполагая, что $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$, рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения $A\mu = \lambda B\mu$, равносильную задаче поиска собственных значений и собственных функций матрицы $B^{-1}A$. Уравнение задачи можно переписать в виде

$$(B^{-1/2}AB^{-1/2})(B^{1/2}\mu) = \lambda(B^{1/2}\mu) \Leftrightarrow C\tilde{\mu} = \lambda\tilde{\mu}.$$

Здесь $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$, $\tilde{\mu} = B^{1/2}\mu$. Поскольку $C^T = C > 0$, приходим к выводу, что все собственные значения λ_k матрицы C , они же собственные значения матрицы $B^{-1}A$, действительны и положительны. Из утверждений, доказанных в предыдущем пункте, следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B &\Leftrightarrow \gamma_1 E \leq B^{-1/2}AB^{-1/2} \leq \gamma_2 E \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \gamma_1 \leq \lambda_k \leq \gamma_2; k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\gamma_1 = \lambda_{\min}(B^{-1}A)$, $\gamma_2 = \lambda_{\max}(B^{-1}A)$ — наиболее точные постоянные, с которыми выполняются неравенства $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$.

Определение. Оптимальным итерационным параметром метода (3.5) называется число

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{\min}(B^{-1}A) + \lambda_{\max}(B^{-1}A)}.$$

Замечание. Оптимальный итерационный параметр минимизирует величину ρ на множестве всех положительных γ_1, γ_2 , удовлетворяющих условиям $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$.

Определение. Методом *простой итерации* решения системы (3.3) называется итерационный метод (3.5) при $B = E$, то есть метод

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f; \quad n = 0, 1, \dots$$

Следствие. Пусть $A^T = A > 0$, $\lambda_{\min}(A)$ и $\lambda_{\max}(A)$ — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы A . Тогда для метода *простой итерации* при

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A)}$$

справедлива оценка погрешности

$$\|z_n\| \leq \rho^n \|z_0\|; \quad n = 1, 2, \dots; \quad \text{где } \rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}; \quad \xi = \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}.$$

Замечание. В случае плохо обусловленной матрицы величина ξ мала. Тогда скорость сходимости

$$\ln \frac{1}{\rho} = \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} = \ln \left(1 + \frac{2\xi}{1 - \xi} \right) \approx 2\xi$$

также мала, а число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε ,

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho)} \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi} = O\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

велико. Это означает медленную сходимость метода *простой итерации*. Ускорить сходимость можно следующими способами.

1. За счет использования неявных методов ($B \neq E$) при условии, что

$$\frac{\lambda_{\min}(B^{-1}A)}{\lambda_{\max}(B^{-1}A)} > \frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}.$$

Замечание. Скорость сходимости максимальна, если выбрать $B = A$. Тогда $\rho = 0$ при $\gamma_1 = \lambda_{\min}(B^{-1}A) = \lambda_{\max}(B^{-1}A) = \gamma_2 = 1$, $\tau = 1$ и метод дает точное решение уравнения $Ay = f$ на первой же итерации, поскольку $A(y_1 - y_0) + Ay_0 = f$. Однако для вычисления y_1 необходимо обратить матрицу A , что равносильно нахождению точного решения $y = A^{-1}f$.

2. Для уменьшения общего числа итераций можно использовать переменный итерационный параметр $\tau = \tau_n$, зависящий от номера итерации.

3. Применяется также комбинация первых двух способов.

3.3 Применение стандартных итерационных методов

3.3.1 Метод Якоби

Напомним, что для системы линейных алгебраических уравнений $Ay = f$ метод Якоби имеет вид $Ly_n + Dy_{n+1} + Ry_n = f$. Здесь матрица A представляется в виде суммы $A = L + D + R$ левой треугольной, диагональной и правой треугольной матриц, n — номер итерации.

Покажем, как применяется итерационный метод Якоби к модельной задаче (3.2), свойства которой обсуждались в пункте 3.1.2,

$$\frac{y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j}}{h^2} + \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h^2} = -f_{ij};$$

$$y_{i0} = y_{iN} = y_{0j} = y_{Nj} = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1.$$

Реализация метода Якоби для этой задачи имеет вид

$$\frac{y_{i-1j}^{(n)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{i+1j}^{(n)}}{h^2} + \frac{y_{ij-1}^{(n)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{ij+1}^{(n)}}{h^2} = -f_{ij}, \quad y_{ij}^{(n+1)}|_{\gamma_h} = 0.$$

Замечание. Для проведения расчетов нет необходимости выписывать матрицу A в явном виде и хранить ее в памяти компьютера, поскольку приближенное решение на новой итерации находится явным образом

$$y_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(y_{i-1j} + y_{i+1j} + y_{ij-1} + y_{ij+1})^{(n)} + \frac{h^2}{4}f_{ij}.$$

Запишем метод в каноническом виде (3.5). Обозначая $y_n = \{y_{ij}^{(n)}\}_{i,j=1}^N$, подставим в уравнение тождество $y_{n+1} = y_n + (y_{n+1} - y_n)$. Получим

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f, \quad \tau = \frac{h^2}{4}.$$

Здесь $A = -\Delta_h$, где $\Delta_h y_{ij} = (y_{\bar{x}_1, x_1} + y_{\bar{x}_2, x_2})_{ij}$ — пятиточечный разностный оператор Лапласа. Напомним, что свойства разностного оператора A подробно обсуждались в пункте 3.1. В частности показано, что $A^* = A > 0$, а минимальное и максимальное собственные значения этого оператора

$$\gamma_1 = \lambda_{\min}(A) = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \gamma_2 = \lambda_{\max}(A) = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Отсюда $\tau = h^2/4 = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$, а значит метод Якоби является методом простой итерации с оптимальным итерационным параметром. Согласно следствию теоремы 3.5 для погрешности $z_n = y_n - y$ справедлива оценка

$$\|z_n\| \leq \rho^n \|z_0\|, \quad \text{где } \rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Тогда скорость сходимости

$$\ln \frac{1}{\rho} = \ln \left(1 + \frac{2\xi}{1 - \xi} \right) \approx \frac{\pi^2 h^2}{2},$$

а число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε ,

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{2 \ln(1/\varepsilon)}{\pi^2 h^2} = O(h^{-2}).$$

Из последней оценки следует, что метод Якоби, хотя и является наиболее простым, сходится крайне медленно. В настоящее время применяются методы, требующие $O(h^{-1})$ и даже $O(\ln h^{-1})$ итераций для достижения той же точности.

3.3.2 Метод Зейделя

Напомним, что для системы линейных алгебраических уравнений $Ay = f$ метод Зейделя имеет вид $Ly_{n+1} + Dy_{n+1} + Ry_n = f$. Здесь матрица A представляется в виде суммы $A = L + D + R$ левой треугольной, диагональной и правой треугольной матриц, n — номер итерации.

Реализация метода Зейделя для модельной задачи (3.2) имеет вид

$$\frac{y_{i-1j}^{(n+1)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{i+1j}^{(n)}}{h^2} + \frac{y_{ij-1}^{(n+1)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{ij+1}^{(n)}}{h^2} = -f_{ij}, \quad y_{ij}^{(n+1)}|_{\gamma_n} = 0.$$

Замечание. Хотя метод Зейделя является неявным, нахождение значений на новой итерации не представляет труда, поскольку сводится к обращению треугольной матрицы. Вычисления можно проводить в следующем

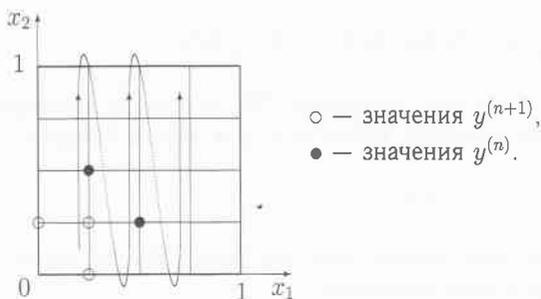


Рис. 3.1. Последовательность вычислений

порядке изменения индексов (см. рис.3.1): $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, N-1), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, N-1), \dots, (N-1, 1), (N-1, 2), \dots, (N-1, N-1)$. Тогда неизвестными в уравнениях будут лишь значения $y_{ij}^{(n+1)}$. Остальные значения с индексом $(n+1)$ либо известны из граничных условий, либо окажутся вычисленными ранее.

Приведем метод к каноническому виду. Для этого удобно сначала рассмотреть одномерный аналог метода

$$\frac{y_{i-1}^{(n+1)} - 2y_i^{(n+1)} + y_{i+1}^{(n)}}{h^2} = -f_i; \quad y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$y_{\bar{x},i}^{(n)} + \frac{y_{i-1}^{(n+1)} - y_{i-1}^{(n)} - 2y_i^{(n+1)} + 2y_i^{(n)}}{h^2} = -f_i,$$

$$y_{\bar{x},i}^{(n)} - \frac{1}{h}(y_{\bar{x},i}^{(n+1)} - y_{\bar{x},i}^{(n)}) - \frac{1}{h^2}(y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)}) = -f_i.$$

Вводя операторы

$$A^{(1)}y_i = -y_{\bar{x},i}, \quad R^{(1)}y_i = \frac{1}{h}y_{\bar{x},i}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0;$$

запишем метод в следующей форме

$$\left(\frac{1}{h^2}E + R^{(1)} \right) (y_{n+1} - y_n) + A^{(1)}y_n = f.$$

Аналогично для модельной задачи метод Зейделя примет вид

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f, \quad A = -\Delta_h, \quad B = \left(\frac{2}{h^2}E + R \right), \quad \tau = 1;$$

$$Ry_{ij} = \frac{1}{h}(y_{\bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2})_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y_{ij}|_{\gamma_h} = 0.$$

Можно показать (см., например, [2]), что число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε , для метода Зейделя

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\pi^2 h^2} = O(h^{-2})$$

примерно в два раза меньше, чем для метода Якоби, однако скорость сходимости по-прежнему невысокая.

3.4 Попеременно–треугольный итерационный метод

3.4.1 Алгебраическая теория

В пункте 3.3 стандартные итерационные методы приводились к виду

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = f,$$

после чего исследовалась их сходимость. Можно поступить более конструктивно. А именно построить новый метод путем специального выбора оператора B .

Далее будем предполагать, что оператор A самосопряженный и положительно определенный, то есть $A^* = A > 0$, или, что то же самое, матрица системы уравнений (3.3) $Ay = f$ симметрична и положительно определена. Введем линейный оператор R , матрица которого имеет вид:

$$R = [r_{ij}]; \quad r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j; \\ 0,5 a_{ij}, & i = j; \\ 0, & i < j; \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Матрица R является нижней треугольной матрицей, а транспонированная по отношению к ней верхняя треугольная матрица R^T является матрицей сопряженного к R оператора R^* . Оператор A представим в виде $A = R + R^*$, причем

$$0 < (Av, v) = ((R + R^*)v, v) = 2(Rv, v) \quad \forall v \in H, \quad v \neq 0 \Rightarrow R, R^* > 0.$$

Для попеременно–треугольного итерационного метода оператор B определяется как произведение

$$B = (E + \omega R^*)(E + \omega R),$$

где E — единичный оператор, а $\omega > 0$ — числовой параметр. Такой выбор оператора B обусловлен следующими обстоятельствами.

1) Используя промежуточное значение $y_{n+1/2}$, где

$$(E + \omega R^*) \underbrace{(E + \omega R)y_{n+1}}_{y_{n+1/2}} = \underbrace{(B - \tau A)y_n + \tau f}_{\varphi_n},$$

решение на новой итерации легко находится в два этапа:

$$(E + \omega R^*)y_{n+1/2} = \varphi_n \quad \text{— система с верхней треугольной матрицей;}$$

$$(E + \omega R)y_{n+1} = y_{n+1/2} \quad \text{— система с нижней треугольной матрицей.}$$

Замечание. Отсюда название метода.

2) Поскольку $B^* = B > 0$, так как

$$B = E + \omega A + \omega^2 R^* R \Rightarrow B^* = B,$$

$$(Bv, v) = ((E + \omega R)v, (E + \omega R)v) \Rightarrow B > 0,$$

можно использовать полученные ранее оценки сходимости.

Лемма 3.17. Пусть существуют положительные постоянные δ и Δ такие, что выполнены операторные неравенства $A \geq \delta E$, $4R^*R \leq \Delta A$. Тогда для операторов $A = R + R^*$ и $B(\omega) = (E + \omega R^*)(E + \omega R)$ справедливы неравенства

$$\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B, \quad \text{где } \gamma_1 = \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \frac{\omega^2 \Delta}{4} \right)^{-1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2\omega}.$$

▼ Доказательство.

$$B(\omega) = E + \omega A + \omega^2 R^* R \leq \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \frac{\omega^2 \Delta}{4} \right) A;$$

$$B(\omega) - B(-\omega) = 2\omega A \Rightarrow B(\omega) \geq 2\omega A, \quad \text{поскольку } B(-\omega) \geq 0.$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Тем самым показано, что нахождение постоянных γ_1 и γ_2 сводится к нахождению постоянных δ и Δ . При выполнении неравенств $A \geq \delta E$, $4R^*R \leq \Delta A$ для произвольного $v \in H$, $v \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \delta \|v\|^2 &\leq (Av, v) = \frac{(Av, v)^2}{(Av, v)} = \frac{4(Rv, v)^2}{(Av, v)} \leq \frac{4\|Rv\|^2 \|v\|^2}{(Av, v)} = \\ &= \frac{4(R^*Rv, v) \|v\|^2}{(Av, v)} \leq \frac{\Delta (Av, v) \|v\|^2}{(Av, v)} = \Delta \|v\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\delta \leq \Delta$. В качестве константы δ можно взять минимальное собственное значение $\lambda_{\min}(A)$ оператора A . Также отметим, что, поскольку $(Av, v) \leq \Delta \|v\|^2$, выполняется неравенство $\Delta \geq \lambda_{\max}(A)$, где $\lambda_{\max}(A)$ — максимальное собственное значение оператора A .

Теорема 3.6. *Предположим, что $A = R + R^*$ и существуют положительные постоянные δ и Δ , при которых выполнены неравенства $A \geq \delta E$, $4R^*R \leq \Delta A$. Пусть*

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{где } \gamma_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\xi})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Тогда попеременно-треугольный итерационный метод сходится и для его погрешности справедлива оценка

$$\|y_n - y\|_A \leq \rho^n \|y_0 - y\|_A, \quad \text{где } \rho = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + 3\sqrt{\xi}}.$$

▼ **Доказательство.** Согласно теореме 3.5 для выполнения требуемой оценки погрешности с константой

$$\rho(\omega) = \frac{1 - \eta}{1 + \eta}, \quad \eta(\omega) = \frac{\gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega)}$$

достаточно положить $\tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2)$. Выберем параметр $\omega > 0$ так, чтобы минимизировать $\rho(\omega)$. Для этого достаточно найти значение $\omega = \omega_0$, при котором функция $\eta^{-1}(\omega)$ достигает минимума. Согласно лемме 3.17

$$\begin{aligned} \eta^{-1}(\omega) &= \frac{\gamma_2(\omega)}{\gamma_1(\omega)} = \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{\delta} + \omega + \frac{\omega^2\Delta}{4} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega\delta} + \frac{\omega\Delta}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega\delta}} - \frac{\sqrt{\omega\Delta}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}, \end{aligned}$$

откуда находим точку минимума $\omega_0 = 2/\sqrt{\delta\Delta}$. Подставляя это значение в выражения для γ_1 и γ_2 , получим

$$\begin{aligned} \gamma_1(\omega_0) &= \left(\frac{1}{\delta} + \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}} + \frac{1}{\delta} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta}}{\delta\sqrt{\Delta}} \right)^{-1} = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\xi})}, \\ \gamma_2(\omega_0) &= \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4} = \frac{\delta}{4\sqrt{\xi}}, \quad \text{где } \xi = \frac{\delta}{\Delta} \in (0; 1]; \\ \eta(\omega_0) &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}; \quad \rho(\omega_0) = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + 3\sqrt{\xi}} \in [0; 1). \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

3.4.2 Применение к модельной задаче

Обсудим применение попеременно–треугольного итерационного метода к модельной задаче (3.2)

$$-\Delta_h y_{ij} = f_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y|_{\gamma_h} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1).$$

Как и ранее, будем рассматривать оператор $A = -\Delta_h$ этой разностной задачи, действующий в пространстве $H = \{y(x_{ij}); x_{ij} \in \Omega_h, y|_{\gamma_h} = 0\}$ со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{i,j=1}^{N-1} y_{ij} v_{ij} h^2.$$

Напомним, что, как показано в пункте 3.1.1, $A^* = A > 0$.

Для того чтобы применить попеременно–треугольный итерационный метод, необходимо представить оператор в виде $A = R + R^*$, где R — оператор с нижней треугольной матрицей, и найти константы δ, Δ , определяющие параметры метода.

Представим оператор A в виде

$$Ay_{ij} = \frac{1}{h} (y_{\bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2})_{ij} - \frac{1}{h} (y_{x_1} + y_{x_2})_{ij}.$$

Тогда, вводя операторы

$$Ry_{ij} = \frac{1}{h} (y_{\bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2})_{ij}, \quad Uy_{ij} = -\frac{1}{h} (y_{x_1} + y_{x_2})_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y|_{\gamma_h} = 0;$$

получим, что $A = R + U$, где R и U — операторы с нижней треугольной и верхней треугольной матрицей соответственно (например, при введении сплошной нумерации узлов сетки Ω_h в естественном порядке по столбцам или по строкам).

Лемма 3.18 ($U = R^*$). *Оператор U является сопряженным к оператору R .*

▼ **Доказательство.** Учитывая тождество

$$\sum_{i=1}^{N-1} (y_{\bar{x}} v)_i h = - \sum_{i=1}^{N-1} (y v_{\bar{x}})_i h, \quad \text{где } y_0 = y_N = v_0 = v_N = 0,$$

доказанное в лемме 3.1, получим для произвольных $y, v \in H$

$$(Ry, v) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \frac{1}{h} (y_{\bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2})_{ij} v_{ij} h^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{N-1} h \sum_{i=1}^{N-1} (y_{\bar{x}_1} v)_{ij} h + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N-1} h \sum_{j=1}^{N-1} (y_{\bar{x}_2} v)_{ij} h = \\
&= -\frac{1}{h} \sum_{j=1}^{N-1} h \sum_{i=1}^{N-1} (y v_{x_1})_{ij} h - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N-1} h \sum_{j=1}^{N-1} (y v_{x_2})_{ij} h = (y, Uv).
\end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Тем самым искомое представление $A = R + R^*$ получено. Осталось определить постоянные δ и Δ . Как уже отмечалось, в качестве константы δ можно взять минимальное собственное значение оператора A , то есть

$$\delta = \lambda_{\min}(A) = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Найдем Δ такое, что

$$4R^*R \leq \Delta A \Leftrightarrow 4(R^*Ry, y) \leq \Delta(Ay, y) \Leftrightarrow 4\|Ry\|^2 \leq \Delta(Ay, y).$$

Ранее показано (см. лемму 3.2), что

$$(Ay, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} y_{\bar{x}_1, ij}^2 h^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N y_{\bar{x}_2, ij}^2 h^2.$$

С другой стороны, из определения оператора R следует, что

$$\|Ry\|^2 = \frac{1}{h^2} \sum_{i,j=1}^{N-1} (y_{\bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2})_{ij}^2 h^2 \leq \frac{2}{h^2} \sum_{i,j=1}^{N-1} (y_{\bar{x}_1}^2 + y_{\bar{x}_2}^2)_{ij} h^2 \leq \frac{2}{h^2} (Ay, y).$$

Отсюда

$$\Delta = \frac{8}{h^2} > \lambda_{\max}(A) = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Согласно теореме 3.6 при выборе параметров метода

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{где} \\
\gamma_1 &= \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\xi})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta} = \sin^2 \frac{\pi h}{2},
\end{aligned}$$

справедлива оценка погрешности с постоянной

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + 3\sqrt{\xi}} = \frac{1 - \sin \frac{\pi h}{2}}{1 + 3 \sin \frac{\pi h}{2}} \approx \left(1 - \frac{\pi h}{2}\right) \left(1 - 3 \frac{\pi h}{2}\right) \approx 1 - 2\pi h.$$

Отсюда минимальное число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε ,

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\rho)} \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{-\ln(1 - 2\pi h)} \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\pi h} = O(h^{-1}).$$

Замечание. Напомним, что для методов Якоби и Зейделя число итераций при малых h оценивалось как $O(h^{-2})$. То есть попеременно-треугольный итерационный метод обеспечивает на порядок более быструю сходимость.

Далее опишем алгоритм нахождения значений $y_{ij}^{(n+1)}$ на новой итерации. Напомним, что итерации проводятся в два этапа

$$\begin{aligned} (E + \omega R^*)y_{n+1/2} &= \varphi_n, \\ (E + \omega R)y_{n+1} &= y_{n+1/2}, \end{aligned}$$

где $\varphi_n = (B - \tau A)y_n + \tau f$. Учитывая определения операторов R и R^* , в индексной форме записи уравнения примут вид

$$\begin{aligned} y_{ij}^{(n+1/2)} - \frac{\omega}{h} (y_{x_1} + y_{x_2})_{ij}^{(n+1/2)} &= \varphi_{ij}^{(n)}, \\ y_{ij}^{(n+1)} + \frac{\omega}{h} (y_{\bar{x}_1} + y_{\bar{x}_2})_{ij}^{(n+1)} &= y_{ij}^{(n+1/2)}. \end{aligned}$$

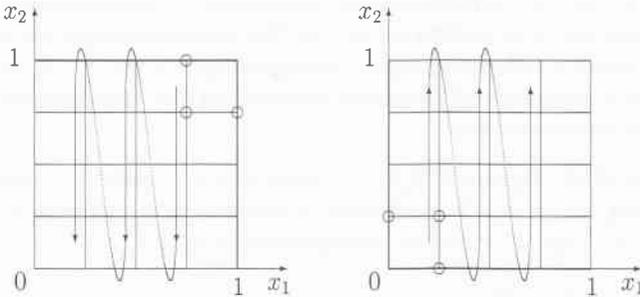


Рис. 3.2. Последовательность вычислений (1 этап слева, 2 этап справа)

Тем самым на первом этапе решается система уравнений

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{2\omega}{h^2}\right) y_{ij}^{(n+1/2)} = \frac{\omega}{h^2} (y_{i+1j}^{(n+1/2)} + y_{ij+1}^{(n+1/2)}) + \varphi_{ij}^{(n)}; \\ y_{Nj}^{(n+1/2)} = y_{iN}^{(n+1/2)} = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

На втором этапе — система уравнений

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{2\omega}{h^2}\right) y_{ij}^{(n+1)} = \frac{\omega}{h^2} (y_{i-1j}^{(n+1)} + y_{ij-1}^{(n+1)}) + y_{ij}^{(n+1/2)}, \\ y_{0j}^{(n+1)} = y_{i0}^{(n+1)} = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Поскольку при соответствующей сплошной нумерации узлов сетки Ω_h матрицы обеих систем являются треугольными, решения систем легко находятся. Для решения первой системы вычисления можно проводить в следующем порядке изменения индексов (см. рис.3.2): $(N-1, N-1), (N-1, N-2), \dots, (N-1, 1), (N-2, N-1), (N-2, N-2), \dots, (N-2, 1), \dots, (1, N-1), (1, N-2), \dots, (1, 1)$. Тогда неизвестными в уравнениях будут лишь значения $y_{ij}^{(n+1/2)}$. Остальные значения с индексом $(n+1/2)$ либо известны из граничных условий, либо окажутся вычисленными ранее. Для решения второй системы вычисления ведутся в обратном порядке изменения индексов (см. рис.3.2): $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, N-1), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, N-1), \dots, (N-1, 1), (N-1, 2), \dots, (N-1, N-1)$.

3.4.3 Попеременно-треугольный метод с чебышевскими итерационными параметрами

Как уже отмечалось, повысить скорость сходимости итерационного метода можно за счет использования переменного итерационного параметра $\tau = \tau_n$, зависящего от номера итерации. При фиксированном числе итераций n можно указать набор итерационных параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, обеспечивающий наилучшую оценку скорости сходимости вне зависимости от выбора начального приближения.

Лемма 3.19. *Функция $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$, где z — комплексная переменная, при $n = 1, 2, \dots$ является многочленом степени n с коэффициентом 2^{n-1} при z^n и имеет вещественные нули*

$$z_l = \cos \frac{(2l-1)\pi}{2n}; \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

▼ Доказательство. Пусть $\alpha = \arccos z$. Исходя из соотношения

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= \cos n\alpha \pm \cos(n-2)\alpha = 2 \cos \alpha \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha = \\ &= 2z \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha, \end{aligned}$$

по индукции с базисом

$$\cos 1\alpha = 2^0 z, \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2^1 z^2 - 1$$

получим первые два утверждения. Найдем корни уравнения

$$\begin{aligned} \cos(n \arccos z) = 0 &\Rightarrow \arccos z = \frac{(2l-1)\pi}{2n} \in [0; \pi] \Rightarrow \\ \Rightarrow l = 1, 2, \dots, n; z_l &= \cos \frac{(2l-1)\pi}{2n}. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Определение. Функция $T_n(z)$ называется **многочленом Чебышева**.

Замечание. Для вещественных x многочлен $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ определен при $|x| \leq 1$. При всех x многочлен $T_n(x)$ можно определить при $n = 1, 2, \dots$ рекуррентной формулой $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, где $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$. Кроме того, в силу верного для любого комплексного числа тождества

$$\cos(n \arccos z) = 0,5 \left(\left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)^n + \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^n \right),$$

можно указать явное выражение для $T_n(x)$ при $|x| \geq 1$.

Для дальнейшего наиболее важным является следующее свойство многочлена $T_n(x)$. Среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом равным 2^{n-1} величина $\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)|$ является минимальной (см., например, [4]).

Теорема 3.7. Пусть $A^* = A > 0$, $B^* = B > 0$, $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$, где $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$. Тогда при заданном числе итераций n и выборе

$$\begin{aligned} \tau_k &= \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 t_k}, \quad t_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \text{где} \\ \tau_0 &= \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \eta}{1 + \eta}, \quad \eta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}; \end{aligned}$$

для минимального числа итераций $n_0(\varepsilon)$, необходимого для достижения заданной точности ε , метода

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f; \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

при малых η справедлива приближенная оценка

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\eta}}.$$

▼ Доказательство. Подробное доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге [4], здесь же обсудим его основную идею.

Рассмотрим уравнение для погрешности $z_k = y_k - y$

$$B^{1/2} \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + B^{-1/2} A B^{-1/2} B^{1/2} z_k = 0,$$

домноженное на оператор $B^{-1/2}$. Обозначая $w_k = B^{1/2} z_k$, получим

$$w_{k+1} = (E - \tau_{k+1} C) w_k, \quad w_0 = B^{1/2} z_0; \quad k = 0, 1, \dots, n-1;$$

где $C = B^{-1/2} A B^{-1/2}$ — самосопряженный оператор, удовлетворяющий неравенствам $\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E$. Отсюда получим равенство

$$w_n = (E - \tau_n C)(E - \tau_{n-1} C) \dots (E - \tau_1 C) w_0 = P_n(C) w_0.$$

Здесь $P_n(C)$ — операторный многочлен степени n . Приходим к оценке

$$\|w_n\| \leq \|P_n(C)\| \|w_0\| \leq \max_{\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2} |P_n(t)| \|w_0\|, \quad P_n(t) = \prod_{k=1}^n (1 - \tau_k t),$$

где t — вещественная переменная. Оценка погрешности $\|z_n\|_B = \|w_n\|$ будет наилучшей, если выбрать параметры τ_k таким образом, чтобы

$$\max_{\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2} |P_n(t)| = \min_{\{\tau_k\}} \max_{\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2} \left| \prod_{k=1}^n (1 - \tau_k t) \right|.$$

При линейной замене переменных, переводящей отрезок $\gamma_1 \leq t \leq \gamma_2$ в отрезок $-1 \leq x \leq 1$, искомым многочлен должен совпадать с многочленом Чебышева $q_n T_n(x)$, нормированным в соответствии с равенством $P_n(0) = 1$. Отсюда вытекает, что нули τ_k^{-1} многочлена $P_n(t)$ выражаются через известные нули многочлена $T_n(x)$ и для погрешности справедлива оценка $\|z_n\|_B \leq q_n \|z_0\|_B$. Выражения для параметров τ_k и асимптотическая оценка числа итераций $n_0(\varepsilon)$, вытекающая из конкретного вида q_n , приведены в формулировке теоремы.

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Оценка числа итераций $n_0(\varepsilon)$ не зависит от порядка, в котором применяются итерационные параметры τ_k , однако этот порядок существенно влияет на вычислительную устойчивость. При практическом применении данного метода используется специальный алгоритм построения упорядоченного набора итерационных параметров (см. [7]), обеспечивающий устойчивость вычислений.

Воспользуемся этой теоремой для оценки числа итераций $n_0(\varepsilon)$ попеременно-треугольного метода с чебышевскими итерационными параметрами для модельной задачи. В этом случае

$$A = R + R^*, \quad B = (E + \omega R^*)(E + \omega R), \quad \omega = \frac{2}{\sqrt{\delta \Delta}};$$

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\xi})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \delta = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{8}{h^2}.$$

Таким образом,

$$\eta = \frac{2\sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}} = \frac{2 \sin(\pi h/2)}{1 + \sin(\pi h/2)} \approx \pi h$$

и для числа итераций $n_0(\varepsilon)$ справедлива приближенная оценка

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\pi h}} = O(h^{-1/2}).$$

В заключение приведем асимптотические (при $h \rightarrow 0$) оценки минимального числа итераций $n_0(\varepsilon)$, необходимого для достижения заданной точности ε , для рассмотренных итерационных методов:

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{2}{\pi^2 h^2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad - \text{ для метода Якоби;}$$

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{\pi^2 h^2} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad - \text{ для метода Зейделя;}$$

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{2\pi h} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad - \text{ для ПТИМ;}$$

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi h}} \ln \frac{2}{\varepsilon} \quad - \text{ для ПТИМ с чебышевскими параметрами.}$$

Здесь аббревиатура ПТИМ является сокращенным обозначением попеременно-треугольного итерационного метода.

3.5 Итерационные методы вариационного типа

3.5.1 Одношаговые итерационные методы вариационного типа

Рассмотрим нестационарный одношаговый итерационный метод решения системы (3.3) $Ay = f$ вида

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau_{n+1}} + Ay_n = f; \quad n = 0, 1, \dots; \quad y_0 \in H. \quad (3.6)$$

Здесь невырожденная матрица B не зависит от номера итерации n , решение y системы (3.3) и последовательные приближения y_n рассматриваются как элементы линейного пространства H размерности m , в котором определены скалярное произведение (y, v) и норма $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Пусть, как и ранее, $z_n = y_n - y$ — погрешность на n -ой итерации, удовлетворяющая уравнению

$$z_{n+1} = (E - \tau_{n+1}B^{-1}A)z_n.$$

Пусть D — некоторая матрица, удовлетворяющая условиям $D^T = D > 0$. Будем выбирать итерационные параметры τ_{n+1} , минимизирующие энергетическую норму (см. пункт 3.2.3) погрешности $\|z_{n+1}\|_D$. Такой способ построения итерационного процесса называется *локальной минимизацией*.

Обозначим $w_{n+1} = D^{1/2}z_{n+1}$, тогда

$$\|z_{n+1}\|_D = \sqrt{(Dz_{n+1}, z_{n+1})} = \sqrt{(D^{1/2}z_{n+1}, D^{1/2}z_{n+1})} = \|w_{n+1}\|,$$

и минимизация энергетической нормы $\|z_{n+1}\|_D$ эквивалентна минимизации нормы $\|w_{n+1}\|$. Перепишем уравнение для погрешности в следующей форме

$$\begin{aligned} D^{1/2}z_{n+1} &= D^{1/2}(E - \tau_{n+1}B^{-1}A)D^{-1/2}D^{1/2}z_n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow w_{n+1} &= (E - \tau_{n+1}D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2})w_n \Leftrightarrow w_{n+1} = (E - \tau_{n+1}C)w_n. \end{aligned}$$

Здесь $C = D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2}$ — невырожденная матрица. Считая что $w_n \neq 0$ (иначе на n -ой итерации найдено точное решение), получим

$$\begin{aligned} \|w_{n+1}\|^2 &= ((E - \tau_{n+1}C)w_n, (E - \tau_{n+1}C)w_n) = \\ &= \|w_n\|^2 + \tau_{n+1}^2(Cw_n, Cw_n) - 2\tau_{n+1}(Cw_n, w_n) = \\ &= \|w_n\|^2 + (Cw_n, Cw_n) \left(\tau_{n+1}^2 - 2\tau_{n+1} \frac{(Cw_n, w_n)}{(Cw_n, Cw_n)} \right) = \\ &= \|w_n\|^2 + (Cw_n, Cw_n) \left(\tau_{n+1} - \frac{(Cw_n, w_n)}{(Cw_n, Cw_n)} \right)^2 - \frac{(Cw_n, w_n)^2}{(Cw_n, Cw_n)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что минимальное значение $\|w_{n+1}\|$ достигается при

$$\tau_{n+1} = \frac{(Cw_n, w_n)}{(Cw_n, Cw_n)}, \text{ где } \tau_{n+1} > 0, \text{ если } C > 0.$$

В дальнейшем будем предполагать условие $C > 0$ выполненным. Отметим, что при таком выборе τ_{n+1} верно равенство

$$\|w_{n+1}\| = \rho_{n+1}\|w_n\|, \text{ где } \rho_{n+1}^2 = 1 - \frac{(Cw_n, w_n)^2}{(Cw_n, Cw_n)(w_n, w_n^*)}.$$

Учитывая, что $Cw_n = D^{1/2}B^{-1}Az_n$ и $w_n = D^{1/2}z_n$, получим

$$\tau_{n+1} = \frac{(DB^{-1}Az_n, z_n)}{(DB^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n)}.$$

Перепишем уравнение итерационного метода (3.6) в виде

$$y_{n+1} = y_n - \tau_{n+1}B^{-1}(Ay_n - f) = y_n - \tau_{n+1}v_n.$$

Здесь вектор $v_n = B^{-1}(Ay_n - f) = B^{-1}r_n$ называется поправкой, а вектор $r_n = Ay_n - f = Az_n$ — невязкой на n -ой итерации. Поскольку $v_n = B^{-1}Az_n$, приходим к равенству

$$\tau_{n+1} = \frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_n, v_n)}. \quad (3.7)$$

Это выражение по-прежнему содержит погрешность z_n , которую нельзя вычислить, поскольку неизвестно точное решение y задачи (3.3). Однако за счет выбора матрицы D можно выразить τ_{n+1} через значения v_n и r_n , которые могут быть вычислены на каждой итерации. Например, если $A^T = A > 0$, то можно выбрать матрицу $D = A$. В этом случае

$$\tau_{n+1} = \frac{(Av_n, z_n)}{(Av_n, v_n)} = \frac{(v_n, Az_n)}{(Av_n, v_n)} = \frac{(v_n, r_n)}{(Av_n, v_n)}.$$

Таким образом, путем выбора матриц B и D можно строить различные одношаговые итерационные методы вариационного типа. Далее будем называть такие методы *градиентными*. Примеры градиентных методов и пояснение смысла их общего названия, будут приведены в следующих пунктах. Здесь же будем предполагать, что выбор матрицы D позволяет вычислять параметры τ_{n+1} на каждой итерации.

Далее обсудим сходимость градиентных методов. Ограничимся так называемым самосопряженным случаем, когда матрица $C^T = C > 0$. Тогда существуют такие положительные постоянные γ_1 и γ_2 , что

$$\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E, \text{ где } C = D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2} = D^{-1/2}(DB^{-1}A)D^{-1/2}.$$

Отсюда получим, что требование $C^T = C > 0$ равносильно условиям

$$(DB^{-1}A)^T = DB^{-1}A; \gamma_1 D \leq DB^{-1}A \leq \gamma_2 D, \gamma_1 > 0. \quad (3.8)$$

Будем считать, что γ_1 и γ_2 — минимальное и максимальное собственные значения матрицы C соответственно. Это наиболее точные значения постоянных γ_1 и γ_2 , при которых выполнены неравенства в (3.8).

Теорема 3.8. Пусть выполнены условия (3.8). Тогда итерационный метод (3.6), (3.7) сходится и для его погрешности справедлива оценка

$$\|z_n\|_D \leq \rho^n \|z_0\|_D, \text{ где } \rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

▼ **Доказательство.** Напомним, что векторы $w_n = D^{1/2}z_n$ при каждом $n = 0, 1, \dots$ удовлетворяют уравнению $w_{n+1} = (E - \tau_{n+1}C)w_n$. Сопоставим этому равенству уравнение

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\tau_0} + Cw_n = 0, \text{ где } \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2},$$

в котором параметр τ_{n+1} заменен значением τ_0 . Последнее равенство совпадает с уравнением для погрешности метода простой итерации с матрицей C , где $C^T = C > 0$, и оптимальным параметром τ . Поэтому в силу следствия из теоремы 3.5 справедлива оценка

$$\|w_{n+1}\|_{\tau=\tau_0} \leq \rho \|w_n\|.$$

Поскольку в итерационном методе (3.6) параметр τ_{n+1} выбирается исходя из минимизации $\|w_{n+1}\|$, также верно неравенство

$$\|w_{n+1}\|_{\tau=\tau_{n+1}} = \min_{\tau>0} \|w_{n+1}\| \leq \|w_{n+1}\|_{\tau=\tau_0}.$$

Приходим к тому, что при каждом $n = 0, 1, \dots$ справедлива оценка

$$\|w_{n+1}\|_{\tau=\tau_{n+1}} \leq \rho \|w_n\| \Rightarrow \|z_n\|_D \leq \rho^n \|z_0\|_D.$$

▲ Утверждение доказано.

Таким образом показано, что в самосопряженном случае любой градиентный метод сходится не хуже, чем соответствующий ему метод простой итерации с симметричной матрицей C . Это не означает, что скорость градиентного метода не может оказаться выше. Например, если в качестве начального приближения выбрать вектор y_0 такой, что соответствующее ему значение $w_0 = D^{1/2}z_0 = D^{1/2}(y_0 - y) = \mu$, где μ — произвольный собственный вектор матрицы C , отвечающий собственному значению λ , получим

$$\tau_1 = \frac{(C\mu, \mu)}{(C\mu, C\mu)} = \frac{1}{\lambda}, \rho_1^2 = 1 - \frac{(C\mu, \mu)^2}{(C\mu, C\mu)(\mu, \mu)} = 0.$$

Отсюда $\|w_1\| = \rho_1 \|w_0\| = 0$, что равносильно равенству $y_1 = y$, которое означает сходимость метода за одну итерацию. Таким образом, при «удачном» выборе начального приближения градиентные методы могут иметь существенно более высокую скорость сходимости по сравнению с соответствующими им методами простой итерации.

Замечание. Аналогично можно показать (см. [7]), что при «неудачном» выборе w_0 для всех $n = 0, 1, \dots$ будет верным равенство $\|w_{n+1}\| = \rho \|w_n\|$. Это означает сходимость со скоростью $\ln(1/\rho)$ и неулучшаемость оценки, доказанной в предыдущей теореме.

Рассмотрим случай, когда $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$, $D = A$. Тогда матрица $DB^{-1}A$ симметрична и неравенства (3.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 A \leq AB^{-1}A \leq \gamma_2 A &\Leftrightarrow \gamma_1 E \leq A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \leq \gamma_2 E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \gamma_1 A^{-1} \leq B^{-1} \leq \gamma_2 A^{-1} &\Leftrightarrow \gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает (см. теорему 3.5), что градиентный метод будет сходиться не хуже стационарного метода (3.5) с теми же матрицами A , B и оптимальным итерационным параметром. При этом для задания оптимального параметра необходимо находить минимальное и максимальное собственные значения γ_1 и γ_2 матрицы $B^{-1}A$. Для соответствующего градиентного метода эти данные не требуются, хотя и могут быть использованы для априорных оценок скорости сходимости.

Замечание. Например, если матрица B выбирается так же, как в попеременно-треугольном итерационном методе, для сходимости соответствующего градиентного метода можно получить априорную оценку сходимости на основе теоремы 3.6.

В заключение отметим, что минимальными требованиями, необходимыми для построения градиентных методов, являются условия $D^T = D > 0$, $C = D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2} > 0$, а также возможность нахождения параметров τ_{n+1} по формуле (3.7). Эти условия не предполагают, что матрица A исходной системы (3.3) непременно должна быть симметричной и(или) положительно определенной.

3.5.2 Метод скорейшего спуска

Метод скорейшего спуска применим для случая симметричной и положительно определенной матрицы системы (3.3), то есть $A^T = A > 0$. Тогда можно выбрать матрицу $D = A$ и, как уже отмечалось,

$$\tau_{n+1} = \frac{(Av_n, z_n)}{(Av_n, v_n)} = \frac{(v_n, Az_n)}{(Av_n, v_n)} = \frac{(v_n, r_n)}{(Av_n, v_n)}.$$

Условие $C > 0$ приводит к ограничению $B > 0$, поскольку

$$(Cy, y) = (A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}y, y) = (B^{-1}A^{1/2}y, A^{1/2}y) > 0 \Rightarrow B > 0.$$

Поясним название метода. Пусть $B = E$, тогда поправка $v_n = B^{-1}r_n$ совпадает с невязкой $r_n = Ay_n - f$, метод является явным и принимает вид

$$y_{n+1} = y_n - \tau_{n+1}r_n, \quad \tau_{n+1} = \frac{(r_n, r_n)}{(Ar_n, r_n)}; \quad n = 0, 1, \dots$$

Получим эти уравнения исходя из других соображений. Рассмотрим вариационную задачу нахождения вектора $y \in H$, для которого $(Ay, x) = (f, x)$ для любых $x \in H$. Эта задача равносильна задаче нахождения решения системы уравнений $Ay = f$. Поскольку $A^T = A > 0$, билинейный функционал $a(y, x) = (Ay, x)$ удовлетворяет условиям $a(y, x) = a(x, y)$, $a(x, x) \geq 0$ при всех $y, x \in H$. Тогда в силу леммы 1.6, доказанной в главе 1, вариационная задача эквивалентна задаче минимизации: найти вектор $y \in H$, доставляющий минимум функционалу $J(x) = a(x, x) - 2(f, x)$.

Функционал $J(x)$ можно рассматривать как функцию независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_m , поскольку

$$J(x) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^m f_i x_i.$$

Производные этой функции, так как $A^T = A$, имеют вид

$$\frac{\partial J}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i - 2f_k = 2(Ax - f)_k.$$

Приходим к выводу, что градиент функции $J(x)$ в точке x совпадает с удвоенным вектором невязки $r = Ax - f$, а значит вектор $(-r)$ задает направление максимального убывания функции $J(x)$.

Таким образом, в итерационной формуле $y_{n+1} = y_n - \tau_{n+1}r_n$ перемещение от вектора y_n к вектору y_{n+1} осуществляется в направлении антиградиента функции $J(x)$ в точке y_n . Отсюда название «градиентные методы». Параметр τ_{n+1} влияет на длину вектора перемещения. Выберем этот параметр путем минимизации значения $J(y_{n+1})$.

$$\begin{aligned} J(y_{n+1}) &= (Ay_{n+1}, y_{n+1}) - 2(f, y_{n+1}) = \\ &= (A(y_n - \tau_{n+1}r_n), y_n - \tau_{n+1}r_n) - 2(f, y_n - \tau_{n+1}r_n) = \\ &= (Ay_n, y_n) - 2\tau_{n+1}(Ay_n, r_n) + \tau_{n+1}^2(Ar_n, r_n) - 2(f, y_n) + 2\tau_{n+1}(f, r_n). \end{aligned}$$

Приравнявая производную $J(y_{n+1})$ по τ_{n+1} к нулю, получим

$$-2(Ay_n, r_n) + 2\tau_{n+1}(Ar_n, r_n) + 2(f, r_n) = 0.$$

Отсюда находим стационарную точку

$$\tau_{n+1} = \frac{(Ay_n, r_n) - (f, r_n)}{(Ar_n, r_n)} = \frac{(r_n, r_n)}{(Ar_n, r_n)}.$$

Вторая производная $J(y_{n+1})$ при всех τ_{n+1} равняется $2(Ar_n, r_n) > 0$ ($r_n \neq 0$). Тем самым найдена точка минимума $J(y_{n+1})$.

3.5.3 Метод минимальных невязок

В методе минимальных невязок выбирается $D = A^T A$, тем самым $D^T = D > 0$. Итерационные параметры вычисляются следующим образом:

$$\tau_{n+1} = \frac{(A^T A v_n, z_n)}{(A^T A v_n, v_n)} = \frac{(A v_n, A z_n)}{(A v_n, A v_n)} = \frac{(A v_n, r_n)}{(A v_n, A v_n)}.$$

Условие $C > 0$ приводит к следующему ограничению применимости метода.

$$\begin{aligned} (C y, y) &= (D^{1/2} B^{-1} A D^{-1/2} y, y) = \{\bar{y} = D^{-1/2} y\} = (D^{1/2} B^{-1} A \bar{y}, D^{1/2} \bar{y}) = \\ &= (D B^{-1} A \bar{y}, \bar{y}) = (A^T A B^{-1} A \bar{y}, \bar{y}) = (A B^{-1} A \bar{y}, A \bar{y}) = \{\tilde{y} = B^{-1} A \bar{y}\} = \\ &= (A \tilde{y}, B \tilde{y}) = (B^T A \tilde{y}, \tilde{y}) > 0 \Rightarrow B^T A > 0. \end{aligned}$$

Если матрица $A > 0$, можно использовать явный метод, выбирая $B = E$. В противном случае необходимо подбирать легко обратимую матрицу B , для которой условие $B^T A > 0$ выполняется.

Название данного метода объясняется тем, что энергетическая норма погрешности

$$\|z_{n+1}\|_D = \sqrt{(A^T A z_{n+1}, z_{n+1})} = \sqrt{(A z_{n+1}, A z_{n+1})} = \|r_{n+1}\|.$$

Поэтому минимизация нормы $\|z_{n+1}\|_D$ в рассматриваемом методе эквивалентна минимизации нормы невязки $\|r_{n+1}\|$.

3.5.4 Метод минимальных поправок

В методе минимальных поправок выбирается $D = A^T B^{-1} A$. Условие $D^T = D > 0$ приводит к ограничениям на выбор матрицы B , а именно $B^T = B > 0$. Итерационные параметры вычисляются следующим образом:

$$\tau_{n+1} = \frac{(A^T B^{-1} A v_n, z_n)}{(A^T B^{-1} A v_n, v_n)} = \frac{(A v_n, B^{-1} A z_n)}{(B^{-1} A v_n, A v_n)} = \frac{(A v_n, v_n)}{(B^{-1} A v_n, A v_n)}.$$

Условие $C > 0$ приводит к дополнительному ограничению.

$$\begin{aligned} (C y, y) &= (D^{1/2} B^{-1} A D^{-1/2} y, y) = \{\bar{y} = D^{-1/2} y\} = (D^{1/2} B^{-1} A \bar{y}, D^{1/2} \bar{y}) = \\ &= (D B^{-1} A \bar{y}, \bar{y}) = (A^T B^{-1} A B^{-1} A \bar{y}, \bar{y}) = (A B^{-1} A \bar{y}, B^{-1} A \bar{y}) = \end{aligned}$$

$$= \{\bar{y} = B^{-1}A\bar{y}\} = (A\bar{y}, \bar{y}) > 0 \Rightarrow A > 0.$$

Итак, метод применим для случая положительно определенной матрицы A .

Для энергетической нормы погрешности справедливы равенства

$$\|z_{n+1}\|_D^2 = (A^T B^{-1} A z_{n+1}, z_{n+1}) = (B^{-1} r_{n+1}, r_{n+1}) = (v_{n+1}, B v_{n+1}) = \|v_{n+1}\|_B^2.$$

Поэтому минимизация нормы $\|z_{n+1}\|_D$ в рассматриваемом методе эквивалентна минимизации нормы поправки $\|v_{n+1}\|_B$. Отсюда и название метода.

3.5.5 Метод минимальных погрешностей

Метод минимальных погрешностей определяется следующим выбором матриц D и B .

$$D = B_0, \quad B = (A^T)^{-1} B_0, \quad \text{где } B_0^T = B_0 > 0.$$

Здесь в качестве B_0 можно выбрать произвольную симметричную положительно определенную матрицу, которая легко обратима, например, диагональную. Итерационные параметры вычисляются следующим образом

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} &= \frac{(B_0 v_n, z_n)}{(B_0 v_n, v_n)} = \frac{(B_0 B^{-1} r_n, z_n)}{(B_0 B^{-1} r_n, v_n)} = \frac{(B_0 B_0^{-1} A^T r_n, z_n)}{(B_0 B_0^{-1} A^T r_n, v_n)} = \\ &= \frac{(r_n, A z_n)}{(r_n, A v_n)} = \frac{(r_n, r_n)}{(r_n, A v_n)}. \end{aligned}$$

Проверим выполнение условия $C > 0$.

$$\begin{aligned} (C y, y) &= (D^{1/2} B^{-1} A D^{-1/2} y, y) = \{\bar{y} = D^{-1/2} y\} = (D^{1/2} B^{-1} A \bar{y}, D^{1/2} \bar{y}) = \\ &= (D B^{-1} A \bar{y}, \bar{y}) = (B_0 B_0^{-1} A^T A \bar{y}, \bar{y}) = (A \bar{y}, A \bar{y}) > 0. \end{aligned}$$

То есть метод применим для произвольной невырожденной матрицы A .

Название метода объясняется тем, что на каждой итерации минимизируется норма погрешности $\|z_{n+1}\|_D = \|z_{n+1}\|_{B_0}$.

3.5.6 Двухшаговые итерационные методы вариационного типа

В градиентных методах параметры τ_{n+1} выбираются путем минимизации нормы погрешности $\|z_{n+1}\|_D$ при условии, что итерационное приближение y_n задано. Используется стратегия локальной минимизации, которая не является оптимальной для отыскания глобального минимума нормы погрешности равного нулю. Естественно попытаться выбрать итерационные параметры таким образом, чтобы для заданного начального приближения y_0 норма $\|z_n\|_D$ являлась минимально возможной для каждого n .

Замечание. Эта задача отличается от рассматриваемой при построении чебышевского набора итерационных параметров (см. пункт 3.4.3) при фиксированном числе итераций n .

Эффективное решение указанной выше задачи возможно в классе двухшаговых итерационных методов вида:

$$B \frac{y_{n+1} - y_n + (1 - \alpha_{n+1})(y_n - y_{n-1})}{\alpha_{n+1}\tau_{n+1}} + Ay_n = f,$$

$$B \frac{y_1 - y_0}{\tau_1} + Ay_0 = f; \quad n = 1, 2, \dots; \quad y_0 \in H.$$

Конкретный метод такого вида определяется выбором матрицы B и итерационных параметров τ_{n+1} , α_{n+1} . При $\alpha_{n+1} = 1$ получим одношаговый метод. Для построения метода вариационного типа также необходимо задать матрицу D , удовлетворяющую условиям $D^T = D > 0$.

Минимизация энергетической нормы $\|z_{n+1}\|_D$ приводит к следующим равенствам, определяющим итерационные параметры:

$$\tau_{n+1} = \frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_n, v_n)}; \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$\alpha_{n+1} = \left(1 - \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n \alpha_n} \frac{(Dv_n, z_n)}{(Dv_{n-1}, z_{n-1})} \right)^{-1}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad \alpha_1 = 1.$$

Здесь параметры τ_{n+1} вычисляются по той же формуле (3.7), что и для градиентных методов. Заметим также, что формулы для α_{n+1} не предполагают вычисления каких-либо дополнительных скалярных произведений.

Подробный вывод этих формул можно найти, например, в книгах [4] и [7]. Здесь же остановимся на наиболее важных аспектах доказательства этих равенств. Так же, как при доказательстве теоремы 3.7, получается, что вектор $w_n = D^{1/2}z_n$ удовлетворяет уравнению $w_n = P_n(C)w_0$, где $C = D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2}$. Матричный многочлен $P_n(C)$ степени n определяется рекуррентными соотношениями, полученными из уравнений двухшагового метода, и удовлетворяет условию $P_n(0) = E$. Предполагается выполнение условий $C^T = C > 0$, что, как уже отмечалось, равносильно требованиям (3.8). Таким образом, эти требования являются условиями применимости метода. Далее устанавливается, что равенства $(Cw_k, w_n) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ являются необходимыми и достаточными условиями минимума нормы $\|w_n\| = \|z_n\|_D$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Исходя из этих условий и находятся итерационные параметры.

Отметим, что векторы u и v , удовлетворяющие равенству $(Cu, v) = 0$, называются *сопряженными* относительно матрицы C ($C^T = C > 0$). Поэтому рассматриваемые двухшаговые методы получили название *методы сопряженных направлений*.

Система векторов $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ является ортогональной в смысле скалярного произведения $(u, v)_C = (Cu, v)$. Поскольку пространство, в котором ищется решение уравнений (3.3), имеет размерность m , система не может содержать более, чем m векторов отличных от нуля. Это означает, что начиная с некоторого $n \leq m$ погрешности w_n обратятся в нуль, то есть метод сходится за конечное число итераций, не превышающее порядок матрицы системы (3.3).

Таким образом, методы сопряженных направлений можно отнести к прямым методам решения системы (3.3). Однако на практике требуемая точность достигается за число итераций существенно меньшее, чем порядок матрицы системы. Действительно, так же, как при доказательстве теоремы 3.7, из равенства $w_n = P_n(C)w_0$ получается оценка

$$\|w_n\| \leq \|P_n(C)\| \|w_0\| \leq \max_{\tau_1 \leq t \leq \tau_2} |P_n(t)| \|w_0\| \leq q_n \|w_0\|,$$

где q_n — по-прежнему нормировочный коэффициент соответствующего многочлена Чебышева. Отсюда следует, что метод сопряженных направлений сходится со скоростью не меньшей, чем одношаговый метод с той же матрицей B и чебышевскими параметрами. В большинстве же случаев $\|w_n\| < q_n \|w_0\|$, поскольку норма $\|w_n\|$ минимальна при заданном $\|w_0\|$, поэтому реальная скорость сходимости существенно выше.

3.5.7 Примеры методов сопряженных направлений

Путем соответствующего выбора матриц B и D в классе методов сопряженных направлений строятся аналоги рассмотренных ранее градиентных методов. Перечислим эти методы и ограничения их применимости, вытекающие из условий (3.8). Заметим, что для методов сопряженных направлений добавляется условие $(DB^{-1}A)^T = DB^{-1}A$.

1) *Метод сопряженных градиентов.*

Так же, как и в методе наискорейшего спуска, выбирается $D = A$. Предполагается, что $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$.

$$\tau_{n+1} = \frac{(v_n, r_n)}{(v_n, Av_n)}, \quad \alpha_{n+1} = \left(1 - \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n \alpha_n} \frac{(v_n, r_n)}{(v_{n-1}, r_{n-1})} \right)^{-1}.$$

2) *Метод сопряженных невязок.*

Выбирается $D = A^T A$. Должны выполняться условия $A^T B = B^T A > 0$.

$$\tau_{n+1} = \frac{(Av_n, r_n)}{(Av_n, Av_n)}; \quad \alpha_{n+1} = \left(1 - \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n \alpha_n} \frac{(Av_n, r_n)}{(Av_{n-1}, r_{n-1})} \right)^{-1}.$$

3) Метод сопряженных поправок.

Выбирается $D = A^T B^{-1} A$ при условиях $A^T = A > 0$, $B^T = B > 0$.

$$\tau_{n+1} = \frac{(Av_n, v_n)}{(B^{-1}Av_n, Av_n)}; \quad \alpha_{n+1} = \left(1 - \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n \alpha_n} \frac{(Av_n, v_n)}{(Av_{n-1}, v_{n-1})} \right)^{-1}.$$

4) Метод сопряженных погрешностей.

Выбирается $D = B_0$, $B = (A^T)^{-1} B_0$, где $B_0^T = B_0 > 0$. Матрица B_0 должна быть легко обратима.

$$\tau_{n+1} = \frac{(r_n, r_n)}{(r_n, Av_n)}; \quad \alpha_{n+1} = \left(1 - \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n \alpha_n} \frac{(r_n, r_n)}{(r_{n-1}, r_{n-1})} \right)^{-1}.$$

3.6 Решение разностных уравнений второго порядка методом Фурье

3.6.1 Разложение по базису собственных функций

Рассмотрим разностную схему

$$y_{\bar{x},i} = -f_i; \quad y_0 = y_N = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = l.$$

В пункте 3.1.1 показано, что порождаемый схемой разностный оператор

$$A^{(1)} y_i = -y_{\bar{x},i}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0;$$

имеет собственные значения

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k h}{2l}; \quad k = 1, 2, \dots, N-1;$$

а собственные функции этого оператора

$$\mu_k(x_i) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi k x_i}{l}; \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \quad i = 0, 1, \dots, N$$

образуют ортонормированный базис в пространстве

$$H^{(1)} = \{y(x_i); x_i \in \Omega_h^{(1)}, y_0 = y_N = 0\}; \quad (y, v)_{H^{(1)}} = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h.$$

Это позволяет искать решение $y \in H^{(1)}$ разностной задачи в виде

$$y = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \mu_k,$$

где c_k — коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя это выражение в операторное уравнение $A^{(1)}y = f$, соответствующее разностной задаче, получим

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_k A^{(1)} \mu_k = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k \mu_k = f.$$

Умножая это равенство скалярно на функцию μ_j , получаем для каждого $j = 1, 2, \dots, N-1$

$$\sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k (\mu_k, \mu_j) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k \delta_{kj} = c_j \lambda_j = (f, \mu_j) = \hat{f}_j.$$

Отсюда приходим к следующему алгоритму нахождения решения y разностной задачи:

$$\hat{f}_k = (f, \mu_k) = \sum_{i=1}^{N-1} f_i \mu_k(x_i) h; \quad k = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$c_k = \frac{\hat{f}_k}{\lambda_k}; \quad k = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$y_i = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \mu_k(x_i); \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

Здесь c_k , \hat{f}_k являются коэффициентами Фурье искомой функции и правой части соответственно.

Несложно подсчитать, что для реализации этого алгоритма требуется $2(N-1)^2$ умножений и $(N-1)$ делений, то есть общего количества операций порядка $O(N^2)$. При этом предполагается, что собственные значения λ_k и собственные функции μ_k вычислены заранее и размещены в памяти компьютера.

Для сравнения, метод прогонки решения той же разностной задачи сводится к следующему алгоритму:

$$\alpha_{i+1} = (2 - \alpha_i)^{-1}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad \alpha_1 = 0;$$

$$\beta_{i+1} = \alpha_{i+1}(\beta_i + h^2 f_i); \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad \beta_1 = 0;$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}; \quad i = N-1, N-2, \dots, 1; \quad y_N = 0;$$

и требует всего $2(N-1)$ умножений и $(N-1)$ делений, то есть общего количества операций порядка $O(N)$.

Следовательно, рассмотренный в данном пункте метод Фурье оказывается неэкономичным при решении одномерных разностных краевых задач.

Однако данный метод в сочетании с быстрым дискретным преобразованием, о котором речь пойдет далее, нашел применение при решении двумерных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

3.6.2 Понятие о быстром дискретном преобразовании Фурье

Наибольшее число арифметических действий в методе Фурье, рассмотренном в предыдущем пункте, приходится на вычисление сумм вида

$$s_i = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \sin \frac{\pi k i}{N}; \quad i = 1, 2, \dots, N - 1;$$

где c_k — заданные числа. Как уже отмечалось, для непосредственного вычисления всех таких сумм требуется порядка $O(N^2)$ операций умножения. Существует метод (см., например, [6]), получивший название *быстрое дискретное преобразование Фурье*, требующий для вычисления всех таких сумм порядка $O(N \ln N)$ умножений. Подробное описание этого метода не входит в программу данного курса лекций, поэтому здесь остановимся лишь на основной идее метода.

Ускоренное вычисление сумм основано на том, что среди чисел $\sin \frac{\pi k i}{N}$; $k, i = 1, 2, \dots, N - 1$ есть много одинаковых. Поэтому можно перегруппировать слагаемые, объединяя их в группы с одинаковыми сомножителями, и уменьшить тем самым число умножений. Например, непосредственное вычисление суммы $ab_1 + ab_2 + ab_3$ требует трех умножений. Если же записать указанную сумму как $a(b_1 + b_2 + b_3)$, потребуется всего одно умножение, то есть объем вычислений сократится в три раза.

Тем самым использование быстрого дискретного преобразования Фурье для решения одномерной разностной краевой задачи из предыдущего пункта позволяет сократить число операций с $O(N^2)$ до $O(N \ln N)$. Однако этот показатель по-прежнему уступает методу прогонки, требующему для реализации порядка $O(N)$ операций.

3.6.3 Решение разностного уравнения Пуассона методом Фурье

Вновь рассмотрим разностную задачу Дирихле для уравнения Пуассона (3.1) на сетке Ω_h , введенной в пункте 3.1.1,

$$y_{\bar{x}_1, i, j} + y_{\bar{x}_2, i, j} = -f_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y_{ij} = 0, \quad x_{ij} \in \gamma_h;$$

и опишем метод решения этой задачи, сочетающий одномерную прогонку с методом Фурье.

В пункте 3.1.1 показано, что решение задачи на собственные значения

$$\mu \bar{x}_{2,j} + \lambda \mu_j = 0; \quad \mu_0 = \mu_{N_2} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1; \quad h_2 N_2 = l_2;$$

имеет вид

$$\lambda_k = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\pi k h_2}{2l_2}; \quad \mu_k(j) = \mu_k(x_{2,j}) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin \frac{\pi k x_{2,j}}{l_2};$$

$$k = 1, 2, \dots, N_2 - 1; \quad j = 0, 1, \dots, N_2.$$

При фиксированном i функции y_{ij} и f_{ij} зависят только от j и могут быть разложены по ортонормированному базису из собственных функций $\mu_k(j)$:

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{N_2-1} c_k(i) \mu_k(j), \quad f_{ij} = \sum_{k=1}^{N_2-1} \hat{f}_k(i) \mu_k(j).$$

Подставляя эти разложения в разностное уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{N_2-1} [(c_k(i))_{\bar{x}_1 x_1} - \lambda_k c_k(i)] \mu_k(j) = - \sum_{k=1}^{N_2-1} \hat{f}_k(i) \mu_k(j).$$

Отсюда, учитывая линейную независимость функций $\mu_k(j)$, приходим к уравнению

$$(c_k(i))_{\bar{x}_1 x_1} - \lambda_k c_k(i) = -\hat{f}_k(i),$$

в котором коэффициенты Фурье $\hat{f}_k(i)$ правой части f_{ij} по-прежнему представляют собой скалярное произведение $\hat{f}_k(i) = (f_{ij}, \mu_k(j))$.

Таким образом, приходим к следующему алгоритму отыскания решения.

1) Для каждого $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ и $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ вычисляются коэффициенты Фурье правой части

$$\hat{f}_k(i) = \sum_{j=1}^{N_2-1} f_{ij} \mu_k(j) h_2.$$

Несложно посчитать, что для этого требуется порядка $O(N_1 N_2^2)$ операций. При использовании быстрого дискретного преобразования — $O(N_1 N_2 \ln N_2)$.

2) Для каждого $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ методом прогонки решаются системы уравнений с трехдиагональной матрицей

$$(c_k(i))_{\bar{x}_1 x_1} - \lambda_k c_k(i) = -\hat{f}_k(i); \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1;$$

$$c_k(0) = c_k(N_1) = 0.$$

Для этого требуется порядка $O(N_1 N_2)$ операций.

3) По найденным коэффициентам Фурье $c_k(i)$ восстанавливается решение

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{N_2-1} c_k(i) \mu_k(j); \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Для этого также, как и для преобразования правой части, требуется порядка $O(N_1 N_2^2)$ операций либо $O(N_1 N_2 \ln N_2)$ операций при использовании быстрого дискретного преобразования Фурье.

Замечание. Для модельной задачи (3.2) число операций порядка $O(N^3)$ либо $O(N^2 \ln N)$ при использовании быстрого дискретного преобразования Фурье. Для сравнения, обычный метод исключения Гаусса для этой задачи потребовал бы порядка $O(N^6)$ операций.

Замечание. Описанный метод применим и для решения нестационарных двумерных задач, где аналогичные рассмотренным разностные уравнения необходимо решать на каждом временном шаге. Здесь особенно важна экономичность числа действий, которую обеспечивает данный метод. К недостаткам метода можно отнести необходимость построения в явном виде собственных значений и собственных функций одномерной задачи, что возможно далеко не всегда.

3.7 Метод матричной прогонки

3.7.1 Запись разностного уравнения Пуассона в виде системы векторных уравнений

Метод матричной прогонки относится к прямым методам решения разностных уравнений, которые можно записать в виде системы векторных уравнений

$$\begin{aligned} -C_0 y_0 + B_0 y_1 &= -F_0; \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} &= -F_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ A_N y_{N-1} - C_N y_N &= -F_N, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где y_i — искомые векторы размерности M , F_i — заданные векторы, A_i , B_i , C_i — заданные квадратные матрицы порядка M .

Покажем, что разностную задачу Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольной сетке Ω_h , введенной в пункте 3.1.1,

$$y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} = -f_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y_{ij} = \mu_{ij}, \quad x_{ij} \in \gamma_h;$$

можно записать в виде подобной системы. Для этого перепишем уравнения в виде:

$$\frac{y_{i-1j}}{h_1^2} - \left(\frac{2y_{ij}}{h_1^2} - \frac{-2y_{i+1j} + y_{ij}}{h_2^2} \right) + \frac{y_{i+1j}}{h_1^2} = -f_{ij} - \frac{\mu_{i0}}{h_2^2};$$

$$\frac{y_{i-1j}}{h_1^2} - \left(\frac{2y_{ij}}{h_1^2} - \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h_2^2} \right) + \frac{y_{i+1j}}{h_1^2} = -f_{ij};$$

$$j = 2, 3, \dots, N_2 - 2;$$

$$\frac{y_{i-1N_2-1}}{h_1^2} - \left(\frac{2y_{iN_2-1}}{h_1^2} - \frac{y_{iN_2-2} - 2y_{iN_2-1}}{h_2^2} \right) + \frac{y_{i+1N_2-1}}{h_1^2} = -f_{iN_2-1} - \frac{\mu_{iN_2}}{h_2^2}.$$

Введем для $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ векторы

$$y_i = (y_{i1} \ y_{i2} \ \dots \ y_{iN_2-1})^T;$$

$$F_i = \left(f_{i1} + \frac{\mu_{i0}}{h_2^2} \quad f_{i2} \quad f_{i3} \quad \dots \quad f_{iN_2-2} \quad f_{iN_2-1} + \frac{\mu_{iN_2}}{h_2^2} \right)^T.$$

Далее обозначим через E_2 единичную матрицу порядка $N_2 - 1$, а через Λ_2 — трехдиагональную матрицу (того же порядка) оператора второй разностной производной по переменной x_2

$$\Lambda_2 = \frac{1}{h_2^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Введем также векторы

$$\mu_0 = (\mu_{01} \ \mu_{02} \ \dots \ \mu_{0N_2-1})^T,$$

$$\mu_{N_1} = (\mu_{N_11} \ \mu_{N_12} \ \dots \ \mu_{N_1N_2-1})^T.$$

Тогда в векторной форме записи система примет вид

$$\frac{1}{h_1^2} E_2 y_{i-1} - \left(\frac{2}{h_1^2} E_2 - \Lambda_2 \right) y_i + \frac{1}{h_1^2} E_2 y_{i+1} = -F_i; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1;$$

$$y_0 = \mu_0, \quad y_{N_1} = \mu_{N_1}.$$

Таким образом, разностная задача Дирихле записана в векторной форме (3.9), где B_0 и A_N — нулевые матрицы,

$$A_i = B_i = \frac{1}{h_1^2} E_2, \quad C_i = \frac{2}{h_1^2} E_2 - \Lambda_2; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1.$$

Замечание. В случае, если $N_2 > N_1$, для использования метода матричной прогонки целесообразно записывать разностную задачу Дирихле в виде аналогичного трехточечного уравнения относительно неизвестных векторов $y_j = (y_{1j} \ y_{2j} \ \dots \ y_{N_1-1j})^T$, поскольку при этом матричные коэффициенты A_j , B_j и C_j будут иметь порядок $N_1 - 1$ меньший, чем $N_2 - 1$.

3.7.2 Алгоритм матричной прогонки

Формулы матричной прогонки получаются так же, как и формулы обычной прогонки, однако при их выводе надо учитывать, что матричные коэффициенты уравнений (3.9) в общем случае непостоянны. Решение системы (3.9) ищется в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}; \quad i = 0, 1, \dots, N - 1;$$

где α_{i+1} — квадратные матрицы того же порядка M , что и порядок матриц A_i , B_i , C_i , а β_{i+1} — вектор размерности M . Подставляя выражение для y_i , а также

$$y_{i-1} = \alpha_i (\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i,$$

в основное уравнение системы

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i,$$

приходим к равенству

$$A_i \alpha_i (\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + A_i \beta_i - C_i (\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + B_i y_{i+1} = -F_i.$$

Это равенство выполняется, если потребовать

$$\begin{aligned} (A_i \alpha_i - C_i) \alpha_{i+1} + B_i &= 0, \\ (A_i \alpha_i - C_i) \beta_{i+1} &= -(A_i \beta_i + F_i). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} B_i; \\ \beta_{i+1} &= (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} (A_i \beta_i + F_i); \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Осталось учесть первое и последнее уравнения системы (3.9). Из первого уравнения

$$-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0 \Rightarrow y_0 = C_0^{-1} B_0 y_1 + C_0^{-1} F_0.$$

Сопоставляя с равенством $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$, получим

$$\alpha_1 = C_0^{-1} B_0, \beta_1 = C_0^{-1} F_0.$$

Из последнего уравнения с учетом равенства $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$

$$\begin{aligned} A_N y_{N-1} - C_N y_N &= -F_N \Rightarrow A_N (\alpha_N y_N + \beta_N) - C_N y_N = -F_N \Rightarrow \\ \Rightarrow y_N &= (C_N - A_N \alpha_N)^{-1} (A_N \beta_N + F_N) = \beta_{N+1}. \end{aligned}$$

Окончательно приходим к следующему алгоритму матричной прогонки.

1) Прямая прогонка:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} B_i, \alpha_1 = C_0^{-1} B_0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ \beta_{i+1} &= (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} (A_i \beta_i + F_i), \beta_1 = C_0^{-1} F_0; \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.10)$$

2) Обратная прогонка:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad y_N = \beta_{N+1}; \quad i = N-1, N-2, \dots, 0.$$

Замечание. Здесь предполагается существование обратных матриц C_0^{-1} и $(C_i - A_i \alpha_i)^{-1}$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$.

Основное количество операций при реализации указанного алгоритма приходится на прямую прогонку. Здесь в каждой точке i приходится один раз обратить матрицу и сделать два умножения матриц порядка M , что требует $O(M^3)$ арифметических действий. Следовательно, для вычисления всех коэффициентов α_i, β_i требуется $O(NM^3)$ операций. Для модельной задачи (3.2), когда $M = N$, число действий становится величиной $O(N^4)$.

Стоит также отметить, что для реализации алгоритма требуется помимо A_i, B_i, C_i и F_i хранить все матрицы α_i и векторы β_i . При больших порядках M это может потребовать использования внешней памяти, что дополнительно увеличивает время счета.

Замечание. По указанным выше причинам метод матричной прогонки целесообразно применять на практике при невысоких порядках M .

3.7.3 Устойчивость матричной прогонки

Будем рассматривать матрицы A_i, B_i, C_i как линейные операторы, действующие в M -мерном линейном пространстве H , в котором определена некоторая норма $\|\cdot\|$.

Определение. Подчиненной нормой матрицы A называется

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in H.$$

Лемма 3.20. Если для матрицы A существует константа $\gamma > 0$ такая, что для любого $x \in H$ выполнено неравенство $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|$, то матрица A имеет обратную, причем $\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$.

▼ Доказательство. Пусть λ — любое собственное значение матрицы A , а μ — отвечающий ему собственный вектор, то есть $A\mu = \lambda\mu$. Тогда

$$\|A\mu\| = |\lambda| \|\mu\| \geq \gamma\|\mu\| \Rightarrow |\lambda| \geq \gamma > 0 \Rightarrow \lambda \neq 0.$$

Значит все собственные значения матрицы A отличны от нуля и, следовательно, существует A^{-1} . Пусть $y \neq 0$ — произвольный вектор из H . Обозначая $x = A^{-1}y$, получим

$$\|Ax\| \geq \gamma\|x\| \Rightarrow \|y\| \geq \gamma\|A^{-1}y\| \Rightarrow \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} \leq \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma}.$$

▲ Утверждение доказано.

Определение. Метод прогонки будем называть *устойчивым*, если матрицы $C_0, C_i - A_i\alpha_i$ имеют обратные и $\|\alpha_i\| \leq 1, i = 1, 2, \dots, N$.

Замечание. Условия $\|\alpha_i\| \leq 1$ обеспечивают численную устойчивость счета по формуле $y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}$, то есть отсутствие роста вычислительной погрешности.

Теорема 3.9. Пусть A_i, B_i — ненулевые матрицы, $i = 1, 2, \dots, N-1$, и пусть существуют матрицы $C_i^{-1}, i = 0, 1, \dots, N$. Если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|C_i^{-1}A_i\| + \|C_i^{-1}B_i\| &\leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ \|C_0^{-1}B_0\| &\leq 1, \quad \|C_N^{-1}A_N\| < 1; \end{aligned}$$

то матричная прогонка устойчива.

▼ Доказательство. По условию теоремы $\|\alpha_1\| = \|C_0^{-1}B_0\| \leq 1$. Покажем, что выполнение неравенства $\|\alpha_i\| \leq 1$ для некоторого $i \geq 1$ влечет за собой существование матрицы $(C_i - A_i\alpha_i)^{-1}$ и выполнение неравенства $\|\alpha_{i+1}\| \leq 1$.

Поскольку $C_i - A_i\alpha_i = C_i(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)$, достаточно доказать существование матрицы $(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)^{-1}$. Для произвольного вектора $x \in H$ имеем

$$\|(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)x\| \geq \|x\| - \|C_i^{-1}A_i\alpha_i x\| \geq$$

$$\geq \|x\| - \|C_i^{-1}A_i\| \|\alpha_i\| \|x\| \geq (1 - \|C_i^{-1}A_i\|) \|x\|.$$

Отсюда и из условий $1 - \|C_i^{-1}A_i\| \geq \|C_i^{-1}B_i\|$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ получим

$$\|(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)x\| \geq \gamma_i \|x\|,$$

где $\gamma_i = \|C_i^{-1}B_i\| > 0$, поскольку $C_i^{-1}B_i$ — ненулевая матрица. Тогда в силу леммы 3.20 существует матрица $(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)^{-1}$, для нормы которой справедлива оценка

$$\|(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)^{-1}\| \leq \|C_i^{-1}B_i\|^{-1}.$$

Таким образом, матрицы α_{i+1} (а также векторы β_{i+1}), заданные рекуррентным соотношением (3.10)

$$\alpha_{i+1} = (C_i - A_i\alpha_i)^{-1}B_i = (E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)^{-1}(C_i^{-1}B_i),$$

существуют и верна оценка

$$\|\alpha_{i+1}\| \leq \|(E - C_i^{-1}A_i\alpha_i)^{-1}\| \|C_i^{-1}B_i\| \leq \|C_i^{-1}B_i\|^{-1} \|C_i^{-1}B_i\| = 1.$$

Тем самым по индукции доказано, что $\|\alpha_i\| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, N$. Осталось показать существование $(C_N - A_N\alpha_N)^{-1}$. Поскольку $\|\alpha_N\| \leq 1$, аналогично предыдущему существование этой матрицы вытекает из оценки

$$\|(E - C_N^{-1}A_N\alpha_N)x\| \geq (1 - \|C_N^{-1}A_N\|) \|x\| = \gamma_N \|x\|,$$

где по условию теоремы $\gamma_N = 1 - \|C_N^{-1}A_N\| > 0$.

▲ Утверждение доказано.

Применим доказанную теорему к исследованию устойчивости метода прогонки для разностного уравнения Пуассона. В пункте 3.7.1 показано, что эта разностная задача записывается в виде системы векторных уравнений (3.9), где

$$A_i = B_i = \frac{1}{h_1^2}E_2, \quad C_i = \frac{2}{h_1^2}E_2 - \Lambda_2, \quad B_0 = A_N = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1.$$

Условия устойчивости матричной прогонки принимают вид

$$\|C_i^{-1}\| \leq \frac{h_1^2}{2} \Leftrightarrow \|C_i y\| \geq \frac{2}{h_1^2} \|y\| \quad \forall y \in H.$$

Здесь H — пространство векторов размерности $N_2 - 1$. Введем в этом пространстве скалярное произведение и норму

$$(y, v) = \sum_{j=1}^{N_2-1} y_j v_j h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|C_i y\|^2 &= \left(\frac{2}{h_1^2} y - \Lambda_2 y, \frac{2}{h_1^2} y - \Lambda_2 y \right) = \\ &= \frac{4}{h_1^4} \|y\|^2 - \frac{4}{h_1^2} (\Lambda_2 y, y) + \|\Lambda_2 y\|^2 \geq \frac{4}{h_1^4} \|y\|^2, \end{aligned}$$

поскольку согласно лемме 3.1, считая $y_0 = y_{N_2} = 0$, получим

$$(\Lambda_2 y, y) = \sum_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_2 x_2 y)_j h_2 = - \sum_{j=1}^{N_2} y_{\bar{x}_2, j}^2 h_2 \leq 0.$$

Таким образом показано, что матричная прогонка для разностного уравнения Пуассона является устойчивой.

3.8 Метод редукции

3.8.1 Вывод основных формул

Метод редукции является прямым методом решения систем разностных уравнений, имеющих вид

$$\begin{aligned} y_{i-1} - C y_i + y_{i+1} &= -F_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ y_0 &= \mu_1, \quad y_N = \mu_2; \end{aligned}$$

где y_i — искомые векторы размерности M и F_i , μ_1, μ_2 — заданные векторы, C — заданная квадратная матрица порядка M . Основным отличием данной системы от систем общего вида (3.9) является независимость матричных коэффициентов от индекса i и равенство коэффициентов A и B .

Метод редукции основан на специальном способе исключения неизвестных из рассматриваемой системы уравнений. Запишем уравнения в точках $i-1$ и $i+1$:

$$y_{i-2} - C y_{i-1} + y_i = -F_{i-1}, \quad y_i - C y_{i+1} + y_{i+2} = -F_{i+1}.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$y_{i-2} + 2y_i - C(y_{i-1} + y_{i+1}) + y_{i+2} = -(F_{i-1} + F_{i+1}),$$

откуда, учитывая, что $y_{i-1} + y_{i+1} = C y_i - F_i$, придем к уравнению

$$y_{i-2} - (C^2 - 2E)y_i + y_{i+2} = -(F_{i-1} + C F_i + F_{i+1}).$$



Рис. 3.3. Метод редукции при $N = 2^4$

Если i — четные, то таким способом можно исключить все неизвестные с нечетными номерами. Далее процесс исключения можно продолжить аналогичным образом. При этом необходимо предположить, что число узлов является степенью двойки, то есть $N = 2^m$.

Проиллюстрируем метод для случая $N = 2^4$ (см. рис.3.3). Обозначим через k номер этапа исключения неизвестных. При $k = 0$ имеем исходную систему уравнений. При переходе к $k = 1$ происходит исключение неизвестных с нечетными номерами, в результате чего получаем систему, аналогичную исходной, содержащую значения неизвестных только в четных узлах. При $k = 2$ остается каждый четвертый узел, а на заключительном этапе при $k = 3$ остается только одно уравнение, связывающее y_0, y_8, y_{16} . Поскольку y_0 и y_{16} заданы, из последнего уравнения можно найти y_8 . Тем самым начинает осуществляться обратный ход метода. Зная y_8 , можно найти y_4 и y_{12} , далее — оставшиеся неизвестные с четными номерами и, наконец, все неизвестные с нечетными номерами.

По индукции получим, что в общем случае при $N = 2^m$ на k -ом шаге исключения имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 y_{i-2^k} - C^{(k)} y_i + y_{i+2^k} &= -F_i^{(k)}, \quad i = 1 \cdot 2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \dots, 2^m - 2^k; \\
 y_0 &= \mu_1, \quad y_{2^m} = \mu_2; \\
 k &= 0, 1, \dots, m - 1.
 \end{aligned}$$

Прямой ход метода редукции фактически состоит в нахождении матриц $C^{(k)}$ и векторов $F_i^{(k)}$:

$$C^{(k)} = (C^{(k-1)})^2 - 2E, \quad C^{(0)} = C;$$

$$F_i^{(k)} = F_{i-2^{k-1}}^{(k-1)} + C^{(k-1)} F_i^{(k-1)} + F_{i+2^{k-1}}^{(k-1)}, \quad F_i^{(0)} = F_i;$$

$$i = 1 \cdot 2^k, 2 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, \dots, 2^m - 2^k;$$

$$k = 1, 2, \dots, m - 1.$$

На обратном ходе находятся значения y_i :

$$y_i = \left(C^{(k)}\right)^{-1} \left(y_{i-2^k} + y_{i+2^k} + F_i^{(k)}\right);$$

$$i = 1 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k, \dots, 2^m - 2^k;$$

$$k = m - 1, m - 2, \dots, 0.$$

Замечание. Метод редукции в том виде, как он здесь изложен, не применяется в реальных вычислениях по двум причинам. Во-первых, он неэкономичен из-за того, что на каждом этапе обратного хода приходится обращать матрицу $C^{(k)}$ общей структуры. Во-вторых, вычисление правых частей на прямом ходе оказывается неустойчивым. В следующих пунктах будет показано, как можно устранить указанные недостатки метода редукции.

3.8.2 Обращение матриц

Напомним, что в пункте 3.4.3 рассматривался многочлен Чебышева, для комплексных z определяемый равенством $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$. Показано, что при $n = 1, 2, \dots$ этот многочлен степени n с коэффициентом 2^{n-1} при z^n имеет вещественные нули $x_l = \cos((2l - 1)\pi/2n)$; $l = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим числовой аналог уравнения прямого хода метода редукции $C^{(k)} = (C^{(k-1)})^2 - 2E$, а именно разностное уравнение

$$y_k = y_{k-1}^2 - 2; \quad k = 1, 2, \dots; \quad y_0 = x.$$

Здесь x — заданное число. Решение этого уравнения имеет вид

$$y_k(x) = 2T_{2^k} \left(\frac{x}{2}\right); \quad k = 0, 1, \dots$$

Действительно,

$$y_0(x) = 2T_1 \left(\frac{x}{2}\right) = x, \quad T_{2^k} \left(\frac{x}{2}\right) = 2T_{2^{k-1}}^2 \left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y_k = \frac{1}{2}y_{k-1}^2 - 1.$$

Согласно лемме 3.19 справедливо разложение на множители

$$y_k(x) = 2T_{2^k} \left(\frac{x}{2}\right) = \prod_{l=1}^{2^k} \left(x - 2 \cos \frac{(2l - 1)\pi}{2^{k+1}}\right).$$

Аналогично для матричного уравнения

$$C^{(k)} = (C^{(k-1)})^2 - 2E; \quad k = 1, 2, \dots; \quad C^{(0)} = C$$

справедливо представление решения в виде разложения

$$C^{(k)} = \prod_{l=1}^{2^k} \left(C - 2 \cos \frac{(2l-1)\pi}{2^{k+1}} E \right) = \prod_{l=1}^{2^k} C_l^{(k)}.$$

Наличие такого разложения позволяет вместо обращения матрицы общего вида $C^{(k)}$ на обратном ходе метода редукции, то есть решения уравнения вида $C^{(k)}v = \varphi$, последовательно решить системы уравнений

$$C_l^{(k)}v_l = v_{l-1}; \quad l = 1, 2, \dots, 2^k; \quad v_0 = \varphi; \quad v = v_{2^k}.$$

Это оказывается более эффективным, если матрицы $C_l^{(k)}$ трехдиагональные (например, в случае разностного уравнения Пуассона), поскольку каждую из систем можно решить методом прогонки.

Замечание. В разложении $\prod_{l=1}^{2^k} C_l^{(k)}$ матрицы $C_l^{(k)}$ перестановочны. Это позволяет за счет выбора порядка, в котором решаются системы уравнений $C_l^{(k)}v_l = v_{l-1}$, существенно снизить вычислительную погрешность (см. [7]). Это приобретает принципиальное значение при больших значениях k . Здесь имеет место примерно та же ситуация, что и в итерационном методе с чебышевским набором параметров.

3.8.3 Вычисление правых частей

Правые части на прямом ходе метода редукции вычисляются из рекуррентного соотношения

$$F_i^{(k+1)} = F_{i-2^k}^{(k)} + C^{(k)}F_i^{(k)} + F_{i+2^k}^{(k)}, \quad F_i^{(0)} = F_i.$$

Здесь для удобства последующих выкладок индекс k по сравнению с предыдущей формой записи увеличен на единицу.

Как уже отмечалось, вычисления по данной формуле приводят к нарастанию вычислительной погрешности. Более предпочтительным оказывается следующий способ вычисления правых частей. Решение ищется в виде

$$F_i^{(k)} = C^{(k)}p_i^{(k)} + q_i^{(k)}.$$

Тогда, учитывая, что $C^{(k+1)} = (C^{(k)})^2 - 2E$, имеем

$$\begin{aligned} & ((C^{(k)})^2 - 2E)p_i^{(k+1)} + q_i^{(k+1)} = \\ & = C^{(k)}p_{i-2^k}^{(k)} + q_{i-2^k}^{(k)} + C^{(k)}(C^{(k)}p_i^{(k)} + q_i^{(k)}) + C^{(k)}p_{i+2^k}^{(k)} + q_{i+2^k}^{(k)} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (C^{(k)})^2(p_i^{(k+1)} - p_i^{(k)}) + q_i^{(k+1)} = \\ & = 2p_i^{(k+1)} + q_{i-2^k}^{(k)} + q_{i+2^k}^{(k)} + C^{(k)}(p_{i-2^k}^{(k)} + p_{i+2^k}^{(k)} + q_i^{(k)}). \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется, если

$$\begin{aligned} C^{(k)}(p_i^{(k+1)} - p_i^{(k)}) &= p_{i-2^k}^{(k)} + p_{i+2^k}^{(k)} + q_i^{(k)}, \\ q_i^{(k+1)} &= 2p_i^{(k+1)} + q_{i-2^k}^{(k)} + q_{i+2^k}^{(k)}. \end{aligned}$$

Отсюда, зная $p_i^{(k)}$ и $q_i^{(k)}$, последовательно находятся $p_i^{(k+1)}$ и $q_i^{(k+1)}$, причем $p_i^{(0)} = 0$ и $q_i^{(0)} = F_i$. Таким образом, вычисление векторов $F_i^{(k)}$ можно заменить нахождением векторов $p_i^{(k)}$, $q_i^{(k)}$. При этом уравнения обратного хода метода редукции $C^{(k)}y_i = y_{i-2^k} + y_{i+2^k} + F_i^{(k)}$ примут вид

$$C^{(k)}(y_i - p_i^{(k)}) = y_{i-2^k} + y_{i+2^k} + q_i^{(k)}.$$

3.8.4 Формулировка и обсуждение алгоритма

С учетом модификаций, сделанных в предыдущих пунктах, приходим к следующему алгоритму метода редукции.

1) Прямой ход метода редукции.

$$\begin{aligned} C^{(k)}s_i^{(k)} &= p_{i-2^k}^{(k)} + p_{i+2^k}^{(k)} + q_i^{(k)}; \\ p_i^{(k+1)} &= p_i^{(k)} + s_i^{(k)}, \quad p_i^{(0)} = 0; \\ q_i^{(k+1)} &= 2p_i^{(k+1)} + q_{i-2^k}^{(k)} + q_{i+2^k}^{(k)}, \quad q_i^{(0)} = F_i; \\ i &= 1 \cdot 2^{k+1}, 2 \cdot 2^{k+1}, 3 \cdot 2^{k+1}, \dots, 2^m - 2^{k+1}; \\ C^{(k+1)} &= (C^{(k)})^2 - 2E, \quad C^{(0)} = C; \\ k &= 0, 1, \dots, m-2. \end{aligned}$$

Уравнения относительно $s_i^{(k)}$ можно решать, используя разложение матрицы $C^{(k)}$ на множители (см. пункт 3.8.2):

$$\begin{aligned} C_l^{(k)}v_{l,i} &= v_{l-1,i}; \quad l = 1, 2, \dots, 2^k; \quad v_{0,i} = p_{i-2^k}^{(k)} + p_{i+2^k}^{(k)} + q_i^{(k)}; \\ s_i^{(k)} &= v_{2^k,i}; \quad i = 1 \cdot 2^{k+1}, 2 \cdot 2^{k+1}, 3 \cdot 2^{k+1}, \dots, 2^m - 2^{k+1}. \end{aligned}$$

2) Обратный ход метода редукции.

$$C^{(k)} t_i^{(k)} = y_{i-2^k} + y_{i+2^k} + q_i^{(k)};$$

$$y_i = p_i^{(k)} + t_i^{(k)}; \quad i = 1 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k, \dots, 2^m - 2^k;$$

$$k = m - 1, m - 2, \dots, 0.$$

Найти $t_i^{(k)}$ также можно путем решения более простых систем уравнений:

$$C_l^{(k)} w_{l,i} = w_{l-1,i}; \quad l = 1, 2, \dots, 2^k; \quad w_{0,i} = y_{i-2^k} + y_{i+2^k} + q_i^{(k)};$$

$$t_i^{(k)} = w_{2^k,i}; \quad i = 1 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k, \dots, 2^m - 2^k.$$

Замечание. При указанном способе нахождения значений $s_i^{(k)}$ и $t_i^{(k)}$ на прямом ходе нет необходимости вычислять матрицу $C^{(k+1)} = (C^{(k)})^2 - 2E$ ($O(M^3)$ арифметических действий), поскольку матрицы $C_l^{(k)}$ известны. В этом случае прямой и обратный ход метода редукции равноценны по числу операций.

Подсчитаем число операций обратного хода. Для каждого $k = m - 1, m - 2, \dots, 0$ решается 2^k систем вида $C_l^{(k)} w_{l,i} = w_{l-1,i}$ при каждом $i = 1 \cdot 2^k, 3 \cdot 2^k, 5 \cdot 2^k, \dots, 2^m - 2^k$ (индекс принимает 2^{m-k-1} различных значений). Пусть q — число действий, затрачиваемое на решение одной такой системы. Тогда число операций обратного хода — $m2^{m-1}q$. Учитывая, что $N = 2^m$, окончательно получим $O(qN \ln N)$ действий. Аналогично можно подсчитать, что число операций прямого хода метода редукции того же порядка.

Для разностного уравнения Пуассона (см. пункт 3.7.1) $N = N_1$, $C = 2E_2 - h_1^2 \Lambda_2$ — трехдиагональная матрица порядка $N_2 - 1$, тем самым применим метод прогонки и $q = O(N_2)$. Отсюда число операций метода редукции — $O(N_2 N_1 \ln N_1)$. В случае модельной задачи (3.2), для которой $N_1 = N_2 = N$, число действий является величиной $O(N^2 \ln N)$.

Приведем оценки числа операций различных прямых методов в случае модельной задачи:

$O(N^6)$ — метод Гаусса (не используется);

$O(N^4)$ — метод матричной прогонки;

$O(N^2 \ln N)$ — быстрое дискретное преобразование Фурье;

$O(N^2 \ln N)$ — метод редукции.

Число операций метода редукции имеет тот же порядок, что и в методе быстрого дискретного преобразования Фурье (см. пункт 3.6.3), но в отличие от последнего метод редукции не требует знания собственных функций

соответствующих разностных операторов. От метода матричной прогонки метод редукции выгодно отличается не только числом действий, но и требуемой памятью, однако матричная прогонка применима для систем векторных уравнений более общего вида.

3.9 Задачи к главе 3

Задача 3.1. Найти собственные значения λ разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} + \frac{\lambda}{4}(y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1;$$

$$y_0 = y_N = 0.$$

Ответ: $\lambda_k = \frac{4}{h^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi kh}{2}; \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$

Задача 3.2. Доказать самосопряженность разностного оператора

$$Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad Ay_N = \frac{1}{h}y_{\bar{x},N}; \quad y_0 = 0.$$

Задача 3.3. Выяснить, сходится ли метод Якоби для разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} = -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1;$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2.$$

Ответ: Сходится.

Задача 3.4. Выяснить, сходится ли метод Якоби для разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} = -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1;$$

$$y_0 = 0, \quad y_{\bar{x},N} = 0.$$

Ответ: Сходится.

Задача 3.5. Доказать сходимость метода Зейделя для задачи

$$\frac{y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j}}{h^2} + \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h^2} = -f_{ij};$$

$$y_{i0} = y_{iN} = y_{0j} = y_{Nj} = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \quad hN = 1.$$

Задача 3.6. Для задачи

$$u''(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1;$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0$$

построить разностную схему второго порядка аппроксимации и выписать метод Зейделя для отыскания ее решения.

Ответ: Второй порядок аппроксимации имеет схема

$$y_{\bar{x},i} = -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1;$$

$$y_0 = 0, \quad y_{\bar{x},N} = \frac{h}{2} f_N.$$

Метод Зейделя имеет вид

$$\frac{y_{i-1}^{(n+1)} - 2y_i^{(n+1)} + y_{i+1}^{(n)}}{h^2} = -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$y_0^{(n+1)} = 0, \quad \frac{y_N^{(n+1)} - y_{N-1}^{(n+1)}}{0,5h^2} = f_N.$$

Задача 3.7. Оценить скорость сходимости и минимальное число итераций $n_0(\varepsilon)$, необходимое для достижения точности $\varepsilon = h^2$, итерационного метода

$$\frac{y_{i-1}^{(n)} - 2y_i^{(n+1)} + y_{i+1}^{(n)}}{h^2} = -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1;$$

$$y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0.$$

Ответ: $\ln(1/\rho) = O(N^{-2})$, $n_0(\varepsilon) = O(N^2 \ln N)$.

Задача 3.8. Для разностной краевой задачи

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i} = -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1;$$

$$y_0 = y_N = 0; \quad 0 < c_1 \leq a_i \leq c_2$$

рассмотреть явный и неявный итерационные методы:

$$\frac{y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)}}{\tau} = (ay_{\bar{x}}^{(n)})_{x,i} + f_i; \quad y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0; \quad n = 0, 1, \dots;$$

$$-\frac{y_{\bar{x},i}^{(n+1)} - y_{\bar{x},i}^{(n)}}{\tau} = (ay_{\bar{x}}^{(n)})_{x,i} + f_i; \quad y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0; \quad n = 0, 1, \dots$$

Выбрать итерационный параметр τ , оценить погрешность на n -й итерации и число итераций $n_0(\varepsilon)$, необходимое для достижения заданной точности ε .

Ответ: Для явного метода

$$\tau = \frac{2}{c_1\delta + c_2\Delta}, \quad \rho = \frac{c_2\Delta - c_1\delta}{c_2\Delta + c_1\delta}, \quad n_0(\varepsilon) \approx 2 \frac{c_2 \ln(1/\varepsilon)}{c_1 \pi^2 h^2},$$

$$\delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}.$$

Для неявного метода

$$\tau = \frac{2}{c_1 + c_2}, \quad \rho = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}, \quad n_0(\varepsilon) = \ln(1/\varepsilon) \ln^{-1} \frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}.$$

Оценка погрешности имеет вид $\|y_n - y\| \leq \rho^n \|y_0 - y\|$.

Задача 3.9. Для разностной схемы

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}_1 x_1, ij} + y_{\bar{x}_2 x_2, ij} &= -f_{ij}; \\ y_{i0} &= y_{iN_2} = y_{0j} = y_{N_1 j} = 0; \\ i &= 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1; \quad h_1 N_1 = l_1, \quad h_2 N_2 = l_2. \end{aligned}$$

записать итерационный метод Якоби и оценить при $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow 0$ число итераций $n_0(\varepsilon)$, необходимое для достижения заданной точности ε .

Ответ: Метод Якоби имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{y_{i-1j}^{(n)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{i+1j}^{(n)}}{h_1^2} + \frac{y_{ij-1}^{(n)} - 2y_{ij}^{(n+1)} + y_{ij+1}^{(n)}}{h_2^2} &= -f_{ij}; \\ y_{i0}^{(n+1)} = y_{iN_2}^{(n+1)} = y_{0j}^{(n+1)} = y_{N_1 j}^{(n+1)} &= 0; \\ i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1; \quad n &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Определяя l и h равенствами $2/l^2 = 1/l_1^2 + 1/l_2^2$, $2/h^2 = 1/h_1^2 + 1/h_2^2$,

$$n_0(\varepsilon) \approx \frac{2l^2 \ln(1/\varepsilon)}{\pi^2 h^2}.$$

Задача 3.10. Построить попеременно-треугольный итерационный метод для решения разностной задачи

$$\begin{aligned} y_{\bar{x}x, i} &= -f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N - 1; \quad hN = 1; \\ y_0 &= y_N = 0. \end{aligned}$$

Выбрать итерационные параметры τ и ω . Оценить число итераций $n_0(\varepsilon)$, необходимое для достижения заданной точности ε .

Ответ: Попеременно-треугольный итерационный метод имеет вид

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\omega}{h^2}\right) y_i^{(n+1/2)} &= \frac{\omega}{h^2} y_{i+1}^{(n+1/2)} + \varphi_i^{(n)}; \quad y_N^{(n+1/2)} = 0; \\ i = N - 1, N - 2, \dots, 1; \quad \varphi_i^{(n)} &= y_i^{(n)} + (\tau - \omega - \omega^2/h^2) y_{\bar{x}x, i}^{(n)} + \tau f_i; \\ \left(1 + \frac{\omega}{h^2}\right) y_i^{(n+1)} &= \frac{\omega}{h^2} y_{i-1}^{(n+1)} + y_i^{(n+1/2)}; \quad y_0^{(n+1)} = 0; \\ i = 1, 2, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

Итерационные параметры выбираются равными

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \quad \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{где}$$

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\xi})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\delta}{\Delta}, \quad \delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{4}{h^2}.$$

Тогда $n_0(\varepsilon) \approx \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\pi h}$.

Задача 3.11. Записать модельную задачу

$$\frac{y_{i-1j} - 2y_{ij} + y_{i+1j}}{h^2} + \frac{y_{ij-1} - 2y_{ij} + y_{ij+1}}{h^2} = -f_{ij};$$

$$y_{i0} = y_{iN} = y_{0j} = y_{Nj} = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \quad hN = 1.$$

в матричной форме $Ay = f$ для $N = 5$.

Ответ: Вводя сплошную нумерацию узлов сетки, например, по строкам

$$y = (y_{11} \ y_{21} \ y_{31} \ y_{41} \ y_{12} \ y_{22} \ \dots \ y_{44})^T,$$

$$f = (f_{11} \ f_{21} \ f_{31} \ f_{41} \ f_{12} \ f_{22} \ \dots \ f_{44})^T,$$

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} A_0 & -E & O & O \\ -E & A_0 & -E & O \\ O & -E & A_0 & -E \\ O & O & -E & A_0 \end{bmatrix}; \quad A_0 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Здесь E и O — соответственно единичная и нулевая квадратные матрицы четвертого порядка.

Задача 3.12. Выяснить порядок числа арифметических действий при решении методом редукции системы уравнений

$$y_{i-1} - Cy_i + y_{i+1} = -F_i; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2;$$

где $y_i, C, F_i, \mu_1, \mu_2$ — вещественные числа.

Ответ: $O(N \ln N)$.

Глава 4

Теория устойчивости разностных схем

4.1 Разностные схемы как операторные уравнения

4.1.1 Представление разностных схем в виде операторных уравнений

Разностная схема представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в векторной форме $Ay = \varphi$, где A — матрица системы, y — искомый вектор и φ — заданный вектор, определяемый правыми частями разностных уравнений и дополнительными (начальными и граничными) условиями.

Уравнение $Ay = \varphi$ можно рассматривать также как операторное уравнение, где A — линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве H , а y и φ — элементы этого пространства. При этом разностная схема обычно определяет семейство уравнений, зависящее от шага сетки h ,

$$A_h y_h = \varphi_h; y_h, \varphi_h \in H_h; A_h : H_h \rightarrow H_h.$$

Размерность пространства H_h также зависит от шага сетки h и, как правило, неограниченно возрастает при $h \rightarrow 0$.

Пример 4.1. На разностной сетке

$$\begin{aligned} \Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h &= \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; hN = l\}; \\ \omega_h &= \{x_i; i = 1, 2, \dots, N-1\}; \gamma_h = \{x_0, x_N\}; \end{aligned}$$

рассматривается разностная схема

$$y_{\bar{x},i} = -f_i; i = 1, 2, \dots, N-1; y_0 = \mu_1, y_N = \mu_2.$$

Введем пространство $H_{N-1} = \{y(x_i); x_i \in \omega_h\}$ сеточных функций, определенных во внутренних узлах сетки. Перепишем уравнения в виде

$$\begin{aligned} (A^{(1)}y)_1 &= \frac{2y_1 - y_2}{h^2} = f_1 + \frac{\mu_1}{h^2} = \varphi_1; \\ (A^{(1)}y)_i &= -y_{\bar{x},i} = f_i = \varphi_i; \quad i = 2, 3, \dots, N-2; \\ (A^{(1)}y)_{N-1} &= \frac{-y_{N-2} + 2y_{N-1}}{h^2} = f_{N-1} + \frac{\mu_2}{h^2} = \varphi_{N-1}. \end{aligned}$$

Данные равенства задают линейный оператор $A^{(1)} : H_{N-1} \rightarrow H_{N-1}$ (действующий из H_{N-1} в H_{N-1}), и вектор $\varphi \in H_{N-1}$. Тем самым разностная схема может быть записана в виде

$$A^{(1)}y = \varphi; \quad y, \varphi \in H_{N-1}.$$

Тот же оператор можно ввести иначе. Рассмотрим пространство функций

$$H_{N-1}^0 = \{y(x_i); x_i \in \Omega_h, y_0 = y_N = 0\},$$

определенных на сетке Ω_h и обращающихся в нуль в граничных узлах. Тогда оператор $A^{(1)} : H_{N-1}^0 \rightarrow H_{N-1}^0$ можно определить единообразно во всех узлах сетки ω_h :

$$(A^{(1)}y)_i = -y_{\bar{x},i}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0.$$

При этом разностную схему по-прежнему можно записать в виде

$$A^{(1)}y = \varphi; \quad y \in H_{N-1}^0, \quad \varphi \in H_{N-1}.$$

Отметим, что пространство H_{N-1} совпадает с пространством H_{N-1}^0 , если элементы H_{N-1} доопределить нулями в граничных узлах сетки.

Пример 4.2. В прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$ введем разностную сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= (x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2; \quad h_1N_1 = l_1, \quad h_2N_2 = l_2; \\ \omega_h &= \{x_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}; \\ \gamma_h &= \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1j}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим разностную задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$(y_{\bar{x}_1x_1} + y_{\bar{x}_2x_2})_{ij} = -f_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y|_{\gamma_h} = 0.$$

Аналогично предыдущему примеру введем пространства

$$H(\omega) = \{y(x_{ij}); x_{ij} \in \omega_h\};$$

$$H^0(\Omega) = \{y(x_{ij}); x_{ij} \in \Omega_h, y|_{\gamma_h} = 0\};$$

$$\dim H(\omega) = \dim H^0(\Omega) = (N_1 - 1)(N_2 - 1);$$

и линейный оператор $A : H^0(\Omega) \rightarrow H(\omega)$, определяемый равенствами

$$(Ay)_{ij} = -(y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y|_{\gamma_h} = 0.$$

Напомним, что свойства этого оператора подробно обсуждались в пункте 3.1.1 предыдущей главы. Разностное уравнение Пуассона примет вид

$$Ay = \varphi; \quad y \in H^0(\Omega), \quad \varphi \in H(\omega).$$

В случае неоднородных граничных условий достаточно изменить правую часть φ в приграничных узлах сетки так же, как это делалось в предыдущем примере.

Отметим, что можно было ввести оператор, как $A : H(\omega) \rightarrow H(\omega)$, что привело бы к более громоздким формулам, определяющим A .

4.1.2 Корректность операторных уравнений

Пусть разностная схема записана в виде операторного уравнения

$$A_h y_h = \varphi_h; \quad y_h, \varphi_h \in H_h; \quad A_h : H_h \rightarrow H_h. \quad (4.1)$$

Будем предполагать, что в пространстве H_h заданы нормы $\|\cdot\|_{(1_h)}$ и $\|\cdot\|_{(2_h)}$.

Определение. Уравнение (4.1) называется *корректным*, если

- 1) решение уравнения y_h существует и единственно при любых $\varphi_h \in H_h$;
- 2) существует постоянная $M > 0$, не зависящая от h , такая, что при любых $\varphi_h \in H_h$ выполняется оценка

$$\|y_h\|_{(1_h)} \leq M \|\varphi_h\|_{(2_h)}.$$

Определение. Свойство 2 называется *устойчивостью* разностной схемы, записанной в виде операторного уравнения (4.1).

Замечание. Условие 1 эквивалентно существованию оператора A_h^{-1} , а условие 2 — равномерной по h ограниченности A_h^{-1} .

Далее будем считать, что в пространстве H_h введены скалярное произведение $(y, v)_h$ и подчиненная норма $\|y\|_h = \sqrt{(y, y)_h}$.

Теорема 4.1. Если существует постоянная $\delta > 0$, не зависящая от h , такая, что при любом $v_h \in H_h$ выполнено неравенство

$$(A_h v_h, v_h)_h \geq \delta \|v_h\|_h^2,$$

то уравнение (4.1) корректно и для его решения выполняется оценка

$$\|y_h\|_h \leq \delta^{-1} \|\varphi_h\|_h.$$

▼ Доказательство.

1) Пусть z_h — решение однородного уравнения $A_h z_h = 0$, тогда

$$\delta \|z_h\|_h^2 \leq (A_h z_h, z_h) = 0 \Rightarrow \|z_h\|_h = 0 \Leftrightarrow z_h = 0,$$

то есть однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Это равносильно существованию и единственности решения уравнения (4.1) при любой правой части.

2) Пусть y_h — решение уравнения (4.1). Тогда с учетом неравенства Коши – Буняковского получим

$$\delta \|y_h\|_h^2 \leq (A_h y_h, y_h) = (\varphi_h, y_h) \leq \|\varphi_h\|_h \|y_h\|_h \Rightarrow \|y_h\|_h \leq \delta^{-1} \|\varphi_h\|_h.$$

▲ Утверждение доказано.

Отметим связь неравенства $(Av, v) \geq \delta \|v\|^2$ с оценками спектра оператора A . Здесь и далее, где это не вызовет недоразумений, индексы h в записи будем опускать.

Лемма 4.1. *Если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что при любых $v \in H$ выполнено неравенство $(Av, v) \geq \delta \|v\|^2$, то все собственные значения λ оператора A — действительные числа, удовлетворяющие неравенству $\lambda \geq \delta$.*

▼ Доказательство. Пусть λ — произвольное собственное значение оператора A , а μ — отвечающая ему собственная функция, тогда

$$\lambda \|\mu\|^2 = (A\mu, \mu) \geq \delta \|\mu\|^2 \Rightarrow \lambda \geq \delta.$$

▲ Утверждение доказано.

В случае $A^* = A$ верно и обратное.

Лемма 4.2. *Если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что все собственные значения λ самосопряженного оператора A удовлетворяют неравенству $\lambda \geq \delta$, то при любых $v \in H$ $(Av, v) \geq \delta \|v\|^2$.*

▼ Доказательство. В случае $A^* = A$ существует ортонормированный базис $\{\mu_k\}$ пространства H из собственных векторов оператора A , а значит для произвольного $v \in H$

$$v = \sum_k c_k \mu_k \Rightarrow (Av, v) = \sum_k \lambda_k c_k^2 \geq \delta \sum_k c_k^2 = \delta \|v\|^2.$$

▲ Утверждение доказано.

Следствие. Если $A_h^* = A_h$, и существует постоянная $\delta > 0$, не зависящая от h , такая, что минимальное собственное значение $\lambda_{\min}(A_h)$ оператора A_h удовлетворяет неравенству $\lambda_{\min}(A_h) \geq \delta$, то уравнение (4.1) корректно и для его решения выполняется оценка $\|y_h\|_h \leq \delta^{-1} \|\varphi_h\|_h$.

Пример 4.3. Вновь рассмотрим разностную задачу примера 4.1. В пространстве H_{N-1}^0 введем скалярное произведение и подчиненную норму

$$(y, v)_{H_{N-1}^0} = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h; \quad \|y\|_{H_{N-1}^0} = \sqrt{(y, y)_{H_{N-1}^0}}.$$

Тогда оператор разностной задачи $A^{(1)}$ является самосопряженным в H_{N-1}^0 и справедлива оценка $\lambda_{\min}(A^{(1)}) \geq 9/l^2$ для произвольных h (см. пункт 3.1.1). Отсюда вытекает корректность разностной задачи и выполнение оценки $\|y\|_{H_{N-1}^0} \leq (9/l^2)^{-1} \|\varphi\|_{H_{N-1}^0}$.

Пример 4.4. В случае разностной схемы из примера 4.2 скалярное произведение и норма в $H^0(\Omega)$ определяются как

$$(y, v)_{H^0(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2, \quad \|y\|_{H^0(\Omega)} = \sqrt{(y, y)_{H^0(\Omega)}}.$$

Оператор разностной задачи A является самосопряженным в $H^0(\Omega)$, и его минимальное собственное значение оценивается снизу константой $\delta = 9/l_1^2 + 9/l_2^2$. Следовательно, разностная схема корректна и для ее решения справедлива оценка $\|y\|_{H^0(\Omega)} \leq (9/l_1^2 + 9/l_2^2)^{-1} \|f\|_{H^0(\Omega)}$.

4.1.3 Операторы первой разностной производной

На сетке $\Omega_h = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N, hN = l\}$ рассмотрим разностное уравнение первого порядка

$$y_{x_i} = f_i; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad y_0 = \mu_1.$$

Данная задача корректна, поскольку ее решение задается явной формулой:

$$y_i = y_{i-1} + hf_i; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad y_0 = \mu_1 \Rightarrow y_i = \mu_1 + \sum_{j=1}^i hf_j;$$

из которой следует и устойчивость:

$$\|y\|_C \leq |\mu_1| + l \|f\|_C, \quad \text{где } \|y\|_C = \max_{1 \leq i \leq N} |y_i|.$$

Введем пространство $H_N = \{y(x_i); i = 1, 2, \dots, N\}$ со скалярным произведением

$$(y, v)_{H_N} = \sum_{i=1}^N y_i v_i h.$$

Определение. Оператор $A : H_N \rightarrow H_N$, определяемый формулами

$$(Ay)_1 = \frac{y_1}{h}; \quad (Ay)_i = y_{\bar{x},i}; \quad i = 2, 3, \dots, N;$$

называется оператором левой разностной производной.

Замечание. Рассматриваемую разностную задачу можно записать в виде $Ay = \varphi$, где $\varphi = (\varphi_1 + \mu_1/h \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \dots \quad \varphi_N)^T$.

Лемма 4.3. Оператор $A^* : H_N \rightarrow H_N$, сопряженный оператору левой разностной производной, задается формулами

$$(A^*v)_i = -v_{\bar{x},i}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (A^*v)_N = \frac{v_N}{h}.$$

▼ Доказательство.

$$\begin{aligned} (Ay, v)_{H_N} &= \sum_{i=1}^N (Ay)_i v_i h = y_1 v_1 + \sum_{i=2}^N (y_i - y_{i-1}) v_i h = \\ &= \sum_{i=1}^N y_i v_i h - \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_{i+1} h = - \sum_{i=1}^{N-1} y_i \frac{v_{i+1} - v_i}{h} h + y_N \frac{v_N}{h} h = (y, A^*v)_{H_N}. \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Определение. Оператор A^* называется оператором правой разностной производной.

Лемма 4.4. Оператор левой разностной производной A положительно определен, и верно равенство

$$(Ay, y)_{H_N} = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_N^2) + \frac{h}{2} \sum_{i=2}^N y_{\bar{x},i}^2 h.$$

▼ Доказательство. Для произвольного $y \in H_N$

$$(Ay, y)_{H_N} = y_1^2 + \sum_{i=2}^N (y_i - y_{i-1}) y_i h = \sum_{i=1}^N y_i^2 h - \sum_{i=2}^N y_{i-1} y_i h =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N y_i^2 - \sum_{i=2}^N y_{i-1} y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{N+1} y_{i-1}^2 = \frac{y_1^2 + y_N^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^N (y_i - y_{i-1})^2 \geq 0.$$

Предполагая, что $(Ay, y)_{H_N} = 0$, получим

$$y_1 = 0; y_i = y_{i-1}; i = 2, 3, \dots, N \Rightarrow y = 0.$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Из положительной определенности оператора A следует положительная определенность сопряженного оператора A^* , поскольку $(Ay, y) = (y, A^*y) = (A^*y, y)$ для произвольного $y \in H_N$.

4.2 Канонический вид и условия устойчивости двуслойных разностных схем

4.2.1 Канонический вид двуслойных разностных схем

Запись разностных схем в виде операторных уравнений $A_h y_h = \varphi_h$, удобная для стационарных задач, оказывается недостаточно детальной при переходе к нестационарным разностным схемам. Поэтому при исследовании двуслойных и трехслойных разностных схем используются другие формы записи.

Пусть, как и ранее, $H_h = \{y(x); x \in \Omega_h\}$ — пространства функций заданных на разностной сетке Ω_h , размерность которых зависит от шагов сетки h , где h считаются векторами с нормой $|h|$.

На отрезке $[0; T]$ введем сетку по времени

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, K; \tau K = T\}.$$

Будем рассматривать функции $y_{h,\tau}(t_n) \in H_h$ дискретного аргумента $t_n \in \omega_\tau$, которые могут зависеть параметрически от h и τ . В дальнейшем будем обозначать $y_n = y_{h,\tau}(t_n)$.

Определение. Пусть заданы линейные операторы $B_1, B_2 : H_h \rightarrow H_h$ и функции $\varphi_n, y_0 \in H_h$. Двуслойной разностной схемой называется семейство операторно-разностных уравнений

$$B_1 y_{n+1} + B_2 y_n = \varphi_n; n = 0, 1, \dots, K - 1.$$

Рассматривается задача Коши: по заданному элементу $y_0 \in H_h$ и заданым $\varphi_n \in H_h$ найти решение y_n данного уравнения для всех $n = 1, 2, \dots, K$.

Замечание. Термин «операторно-разностное уравнение» означает, что рассматриваемое уравнение является разностным по n уравнением с операторными коэффициентами.

Перепишем уравнение в виде

$$\tau B_1 \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + (B_1 + B_2)y_n = \varphi_n$$

и введем операторы $B = \tau B_1$ и $A = \tilde{B}_1 + B_2$.

Определение. Каноническим видом двуслойной разностной схемы называется ее запись в форме

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n; \quad n = 0, 1, \dots, K - 1.$$

Замечание. Операторы A , B и функция φ могут зависеть от h , τ и n , то есть $A = A_{h,\tau}(t_n)$, $B = B_{h,\tau}(t_n)$, $\varphi_n = \varphi_{h,\tau}(t_n)$, в отличие от канонической формы одношагового итерационного метода, в которой A и φ не зависят от τ и n .

Замечание. Запись двуслойных схем в канонической форме облегчает их анализ и сравнение. Условия устойчивости схем удобно формулировать в терминах свойств операторов A и B .

Пример 4.5. На разностной сетке

$$\Omega_h = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; hN = l\};$$

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, K; \tau K = T\};$$

рассмотрим схему с весами для уравнения теплопроводности

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma y_{xx,i}^{n+1} + (1 - \sigma)y_{xx,i}^n;$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1; \quad n = 0, 1, \dots, K - 1;$$

$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0; \quad y_i^0 = u_0(x_i).$$

Введем пространство $H_h = \{y(x_i); x_i \in \Omega_h, y_0 = y_N = 0\}$ и оператор

$$A : H_h \rightarrow H_h; \quad (Ay)_i = -y_{xx,i}; \quad i = 1, 2, \dots, N - 1; \quad y_0 = y_N = 0.$$

Обозначая $y_n = (0 \ y_1^n \ y_2^n \ \dots \ y_{N-1}^n \ 0)^T \in H_h$, где $y_i^n = y(x_i, t_n)$, перепишем схему в виде операторного уравнения

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sigma Ay_{n+1} + (1 - \sigma)Ay_n = 0,$$

которое будем называть двуслойной операторно-разностной схемой с весами. В канонической форме записи уравнение примет вид

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n; \text{ где } B = E + \sigma\tau A, \varphi_n = 0.$$

Пример 4.6. На той же разностной сетке, что и в предыдущем примере, рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} y_i^{n+1} &= 0,5(y_{i-1}^n + y_{i+1}^n); \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, \dots, K-1; \\ y_0^{n+1} &= y_N^{n+1} = 0; \quad y_i^0 = u_0(x_i). \end{aligned}$$

Перепишем основное уравнение в виде

$$y_i^{n+1} - y_i^n = 0,5(y_{i-1}^n - 2y_i^n + y_{i+1}^n) \Leftrightarrow \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{0,5h^2} = y_{xx,i}^n.$$

Отсюда получим, что в канонической форме записи A — оператор из предыдущего примера, $B = E$, $\tau = 0,5h^2$. Тем самым схема представляет собой частный случай схемы с весами при $\sigma = 0$, $\tau = 0,5h^2$.

Замечание. Последний вывод не был столь очевиден до приведения схемы к каноническому виду.

4.2.2 Устойчивость двуслойных схем

Далее будем предполагать, что в канонической форме записи двуслойной схемы

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n; \quad n = 0, 1, \dots, K-1; \quad y_0 \in H_h. \quad (4.2)$$

для всех h , τ и n у оператора $B = B_{h,\tau}(t_n)$ существует обратный оператор B^{-1} . Тем самым гарантируется существование и единственность решения задачи (4.2), то есть первое условие корректности разностной схемы выполнено.

Будем считать, что в пространстве H_h заданы нормы $\|\cdot\|_{1,h}$ и $\|\cdot\|_{2,h}$.

Определение. Разностная схема (4.2) называется устойчивой, если существуют постоянные $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, не зависящие от h , τ и n , такие, что при любых правых частях $\varphi_{h,\tau}(t_n) \in H_h$ и любых начальных данных $y_0 \in H_h$ для решения уравнения (4.2) выполняется оценка

$$\|y_n\|_{1,h} \leq M_1 \|y_0\|_{1,h} + M_2 \max_{0 \leq j \leq n-1} \|\varphi_j\|_{2,h}; \quad n = 1, 2, \dots, K. \quad (4.3)$$

Наряду с уравнением (4.2) рассмотрим однородное уравнение

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0; \quad n = 0, 1, \dots, K-1; \quad y_0 \in H_h; \quad (4.2')$$

и уравнение с нулевыми начальными данными

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = \varphi_n; \quad n = 0, 1, \dots, K-1; \quad y_0 = 0. \quad (4.2'')$$

Определение. Разностная схема (4.2) называется *устойчивой по начальным данным*, если существует постоянная $M_1 > 0$, не зависящая от h, τ и n , такая, что при любых любых начальных данных $y_0 \in H_h$ для решения уравнения (4.2') выполняется оценка

$$\|y_n\|_{1_h} \leq M_1 \|y_0\|_{1_h}; \quad n = 1, 2, \dots, K.$$

Определение. Разностная схема (4.2) называется *устойчивой по правой части*, если существует постоянная $M_2 > 0$, не зависящая от h, τ и n , такая, что при любых правых частях $\varphi_{h,\tau}(t_n) \in H_h$ для решения уравнения (4.2'') выполняется оценка

$$\|y_n\|_{1_h} \leq M_2 \max_{0 \leq j \leq n-1} \|\varphi_j\|_{2_h}; \quad n = 1, 2, \dots, K.$$

Замечание. В силу линейности уравнения (4.2) одновременное наличие устойчивости по начальным данным и устойчивости по правой части равносильно устойчивости разностной схемы в смысле первого определения.

Определение. Разностная схема (4.2) называется *равномерно устойчивой по начальным данным*, если существуют постоянная $\rho > 0$ и постоянная M_1 , не зависящая от h, τ, n , такие, что при любых любых начальных данных $y_0 \in H_h$ для решения уравнения (4.2') выполняется оценка

$$\|y_{n+1}\|_{1_h} \leq \rho \|y_n\|_{1_h}; \quad n = 0, 1, \dots, K-1;$$

причем $\rho^n \leq M_1$.

Замечание. Вводя оператор перехода $S_n = S_{h,\tau}(t_n) = E - \tau B^{-1}A$, перепишем уравнение (4.2') в виде $y_{n+1} = S_n y_n$. Требование $\|y_{n+1}\|_{1_h} \leq \rho \|y_n\|_{1_h}$ равносильно ограниченности нормы S_n , то есть $\|S_n\| \leq \rho$, и влечет за собой неравенство $\|y_n\|_{1_h} \leq \rho^n \|y_0\|_{1_h}$. Последнее означает устойчивость по начальным данным, если $\rho^n < M_1$. Тем самым равномерная устойчивость — требование более сильное, чем просто устойчивость по начальным данным.

Теорема 4.2. Пусть схема (4.2) равномерно устойчива по начальным данным в норме $\|\cdot\|_{1_h}$ и $0 \leq n\tau \leq T$. Тогда схема (4.2) устойчива и

по правой части, причем для ее решения выполнена оценка устойчивости (4.3)

$$\|y_n\|_{1_h} \leq M_1 \|y_0\|_{1_h} + M_2 \max_{0 \leq j \leq n-1} \|\varphi_j\|_{2_h},$$

в которой $\|\varphi_j\|_{2_h} = \|B_j^{-1} \varphi_j\|_{1_h}$ и $M_2 = M_1 T$.

▼ Доказательство. Перепишем уравнение (4.2) при $n = j$ в виде

$$y_{j+1} = S_j y_j + \tau B_j^{-1} \varphi_j, \text{ где } S_j = E - \tau B_j^{-1} A_j.$$

В силу неравенства треугольника и требования равномерной устойчивости

$$\|y_{j+1}\|_{1_h} \leq \|S_j\| \|y_j\|_{1_h} + \tau \|B_j^{-1} \varphi_j\|_{1_h} \leq \rho \|y_j\|_{1_h} + \tau \|B_j^{-1} \varphi_j\|_{1_h}.$$

Используя эту оценку при каждом $j = 0, 1, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}\|_{1_h} &\leq \rho^{n+1} \|y_0\|_{1_h} + \sum_{j=0}^n \tau \rho^{n-j} \|B_j^{-1} \varphi_j\|_{1_h} \leq \\ &\leq M_1 \left(\|y_0\|_{1_h} + T \max_{0 \leq j \leq n} \|B_j^{-1} \varphi_j\|_{1_h} \right). \end{aligned}$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Если существует постоянная M_3 такая, что $\|B_j^{-1}\| \leq M_3$ при любых h , τ и $j = 0, 1, \dots, K-1$, то оценка устойчивости примет вид

$$\|y_n\|_{1_h} \leq M_1 \|y_0\|_{1_h} + M_2 M_3 \max_{0 \leq j \leq n-1} \|\varphi_j\|_{1_h},$$

Следствие. Для устойчивости двуслойной схемы достаточно равномерной устойчивости схемы по начальным данным.

4.2.3 Теорема об устойчивости по начальным данным

Будем предполагать, что в H_h введены скалярное произведение $(y, v)_h$ и норма $\|y\|_h = \sqrt{(y, y)_h}$, а также энергетическая норма $\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)_h}$, если $A^* = A > 0$ (см. пункт 3.2.3). Для упрощения записи индекс h у скалярного произведения и нормы будем в дальнейшем опускать.

Теорема 4.3. Пусть в схеме (4.2) оператор A является самосопряженным, положительно определенным и не зависит от n . Тогда при выполнении операторного неравенства $B \geq 0,5\tau A$ схема (4.2) равномерно устойчива по начальным данным и для решения однородного уравнения (4.2') справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|y_n\|_A; \quad n = 0, 1, \dots, K-1.$$

▼ Доказательство. Обозначив $y_t = (y_{n+1} - y_n)/\tau$ и умножив уравнение (4.2') скалярно на y_t , получим

$$\begin{aligned} (By_t, y_t) + (Ay_n, y_t) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) + (0,5\tau Ay_t + Ay_n, y_t) &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая тождество $0,5\tau y_t + y_n = 0,5(y_n + y_{n+1})$, приходим к равенству

$$((B - 0,5\tau A)y_t, y_t) + 0,5\tau^{-1}(A(y_{n+1} + y_n), y_{n+1} - y_n) = 0.$$

По условию теоремы первое слагаемое неотрицательно, отсюда, учитывая, что $A^* = A > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \geq (A(y_{n+1} + y_n), y_{n+1} - y_n) &= (Ay_{n+1}, y_{n+1}) - (Ay_{n+1}, y_n) + \\ + (Ay_n, y_{n+1}) - (Ay_n, y_n) &= \|y_{n+1}\|_A^2 - \|y_n\|_A^2. \end{aligned}$$

Поскольку оператор A не зависит от n , в полученном неравенстве

$$\|y_{n+1}\|_A \leq \|y_n\|_A$$

нормы в правой и левой части одинаковы.

▲ Утверждение доказано.

Замечание. В теореме 4.3 оператор B может быть несамосопряженным и зависеть от n .

Пример 4.7. Вернемся к рассмотрению разностной схемы с весами для уравнения теплопроводности из примера 4.5, основное уравнение которой —

$$y_{t,i}^n = \sigma y_{\bar{x}\bar{x},i}^{n+1} + (1 - \sigma)y_{\bar{x}\bar{x},i}^n.$$

Напомним, что в канонической форме записи схема имеет вид

$$(E + \sigma\tau A)\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0.$$

Здесь оператор A , свойства которого подробно обсуждались в пункте 3.1.1, определяется равенствами

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}\bar{x},i}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0$$

и действует в пространстве $H_h = \{y(x_i); x_i \in \Omega_h, y_0 = y_N = 0\}$ со скалярным произведением

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h.$$

Поскольку $A^* = A > 0$ и не зависит от n , для устойчивости схемы достаточно выполнения неравенства

$$B = E + \sigma\tau A \geq 0,5\tau A \Leftrightarrow (0,5 - \sigma)\tau(Ay, y) \leq \|y\|^2 \forall y \in H_h.$$

Учитывая, что

$$(Ay, y) \leq \lambda_{\max}(A)\|y\|^2, \quad \lambda_{\max}(A) = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l},$$

приходим к неравенствам

$$(0,5 - \sigma)\tau\lambda_{\max}(A) \leq 1 \Leftrightarrow \sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_{\max}(A)}.$$

Отсюда получим достаточное условие устойчивости схемы

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}.$$

Замечание. В пункте 2.5 методом гармоник показано, что полученное условие также является необходимым для устойчивости схемы с весами (см. пример 2.2).

4.2.4 Несамосопряженные разностные схемы

Рассмотрим двуслойную схему с весами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sigma Ay_{n+1} + (1 - \sigma)Ay_n = 0; \quad n = 0, 1, \dots, K - 1; \quad (4.4)$$

где A — оператор, действующий в пространстве H_h со скалярным произведением (y, v) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$, σ — числовой параметр. Схема имеет канонический вид (4.2), где $B = E + \sigma\tau A$. Далее, как и ранее, предполагаем существование B^{-1} , однако не требуем самосопряженности и положительной определенности оператора A .

Теорема 4.4. Если неравенство $(\sigma - 0,5)\tau\|Av\|^2 + (Av, v) \geq 0$ выполнено при любых $v \in H_h$, то схема (4.4) равномерно устойчива по начальным данным и для ее решения справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|; \quad n = 0, 1, \dots, K - 1.$$

▼ Доказательство. Запишем схему (4.4) в виде $y_{n+1} = Sy_n$. Здесь $S = E - \tau B^{-1}A$, где $B = E + \sigma\tau A$. Заметим, что в данном случае операторы B^{-1} и A перестановочны. Действительно,

$$BA = (E + \sigma\tau A)A = A(E + \sigma\tau A) = AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^{-1}A = B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1} = AB^{-1}.$$

Рассмотрим неравенство $\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|$. Имеем

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}\|^2 &= \|Sy_n\|^2 = (y_n - \tau B^{-1}Ay_n, y_n - \tau B^{-1}Ay_n) = \\ &= \|y_n\|^2 - 2\tau(B^{-1}Ay_n, y_n) + \tau^2\|B^{-1}Ay_n\|^2 \leq \|y_n\|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (B^{-1}Ay_n, y_n) \geq 0,5\tau\|B^{-1}Ay_n\|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (AB^{-1}y_n, y_n) \geq 0,5\tau\|AB^{-1}y_n\|^2. \end{aligned}$$

Обозначим $v = B^{-1}y_n$. Тогда неравенство примет вид

$$(Av, Bv) \geq 0,5\tau\|Av\|^2 \Leftrightarrow (Av, v + \sigma\tau Av) \geq 0,5\tau\|Av\|^2.$$

По условию теоремы последнее неравенство выполнено при любых $v \in H_h$.

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Если оператор A зависит от n , то для равномерной устойчивости схемы (4.4) необходимо потребовать выполнения неравенства из формулировки теоремы при всех $n = 0, 1, \dots, K - 1$.

Замечание. Если оператор A положительно определен, то при $\sigma \geq 1/2$ схема (4.4) устойчива при любых τ , то есть абсолютно устойчива.

Пример 4.8. Рассмотрим краевую задачу для уравнения переноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x \leq l; \\ u(0, t) &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \end{aligned}$$

На разностной сетке $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \omega_\tau$, где

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N, hN = l\}; \\ \omega_\tau &= \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, K, \tau K = T\}; \end{aligned}$$

аппроксимируем задачу разностной схемой

$$\begin{aligned} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + \sigma y_{x,i}^{n+1} + (1 - \sigma)y_{x,i}^n &= 0; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad n = 0, 1, \dots, K - 1; \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \quad y_0^n = 0 \quad (n = 0, 1, \dots, K). \end{aligned}$$

Введем пространство $H_h = \{y(x_i); x_i \in \Omega_h, y_0 = 0\}$ со скалярным произведением и нормой

$$(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

Зададим оператор $A : H_h \rightarrow H_h$ формулами

$$(Ay)_i = y_{\bar{x},i}; \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad y_0 = 0.$$

Тогда разностную схему можно записать в виде (4.4). В пункте 4.1.3 показано, что введенный оператор левой разностной производной не является самосопряженным.

Согласно лемме 4.4 при любом $y \in H$ выполняется тождество

$$(Ay, y) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N y_{\bar{x},i}^2 h + \frac{y_N^2}{2} = \frac{h}{2} \|Ay\|^2 + \frac{y_N^2}{2}.$$

Тогда условие устойчивости из теоремы 4.4 приводит к неравенству

$$(\sigma - 0,5)\tau \|Av\|^2 + 0,5h \|Av\|^2 + 0,5v_N^2 \geq 0,$$

которое выполняется при всех $v \in H$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{\tau} \right).$$

Данное неравенство и представляет собой достаточное условие устойчивости схемы.

Замечание. Из неравенства следует, что явная схема ($\sigma = 0$) устойчива при условии $\tau \leq h$. Это же условие является необходимым условием устойчивости схемы и условием ее монотонности (см. пункт 2.5). Отметим также, что неявные схемы при $\sigma \geq 0,5$ абсолютно устойчивы вследствие положительной определенности оператора A .

4.3 Канонический вид и условия устойчивости трехслойных разностных схем

Определение. Пусть заданы линейные операторы $B_0, B_1, B_2 : H_h \rightarrow H_h$ и функции $\varphi_n, y_0, y_1 \in H_h$. Трехслойной разностной схемой называется семейство операторно-разностных уравнений

$$B_2 y_{n+1} + B_1 y_n + B_0 y_{n-1} = \varphi_n; \quad n = 1, 2, \dots, K-1.$$

Рассматривается задача Коши: по заданным $y_0, y_1 \in H_h$ и заданным правым частям $\varphi_n \in H_h$ найти решение y_n данного уравнения для всех $n = 2, 3, \dots, K$.

Замечание. Предполагается существование обратного оператора B_2^{-1} , что гарантирует существование и единственность решения разностного уравнения.

Замечание. Операторы B_0, B_1, B_2 могут зависеть от h, τ и n , а функция φ_n — от h и τ .

Обозначим $y_i^* = (y_{n+1} - y_{n-1})/(2\tau)$, $y_{it} = (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1})/\tau^2$. Используя тождество

$$\begin{aligned} y_{n\pm 1} &= y_n \pm 0,5(y_{n+1} - y_{n-1}) + 0,5(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_{n\pm 1} &= y_n \pm \tau y_i^* + 0,5\tau^2 y_{it}, \end{aligned}$$

перепишем уравнение в виде

$$\tau(B_2 - B_0)y_i^* + 0,5\tau^2(B_2 + B_0)y_{it} + (B_2 + B_1 + B_0)y_n = \varphi_n.$$

Введем операторы $B = \tau(B_2 - B_0)$, $R = 0,5(B_2 + B_0)$ и $A = B_2 + B_1 + B_0$.

Определение. Каноническим видом трехслойной разностной схемы называется ее запись в форме

$$By_i^* + \tau^2 Ry_{it} + Ay_n = \varphi_n; \quad n = 1, 2, \dots, K - 1. \quad (4.5)$$

Замечание. В каноническом виде (4.5) можно записать любую трехслойную разностную схему, если операторы B_0, B_1, B_2 линейные, а сетка ω_τ равномерная.

Замечание. Существование B_2^{-1} эквивалентно существованию оператора, обратного оператору $B + 2\tau R$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$By_i^* + \tau^2 Ry_{it} + Ay_n = 0; \quad n = 1, 2, \dots, K - 1; \quad y_0, y_1 \in H_h. \quad (4.5')$$

Теорема 4.5. Пусть A и R являются самосопряженными операторами, не зависящими от n . Если выполнены операторные неравенства $R > \frac{1}{4}A > 0$, $B \geq 0$, то при любых $y_0, y_1 \in H_h$ для решения однородного уравнения (4.5') справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|y_{n+1}\|_* &\leq \|y_n\|_*; \quad n = 1, 2, \dots, K - 1; \quad \text{где} \\ \|y_n\|_*^2 &= \frac{1}{4}(A(y_n + y_{n-1}), y_n + y_{n-1}) + ((R - \frac{1}{4}A)(y_n - y_{n-1}), y_n - y_{n-1}). \end{aligned}$$

Доказательство этого утверждения (см. [4]) не входит в программу данного курса лекций. Здесь лишь отметим, что оно основано на возможности приведения трехслойной схемы к двухслойной в пространстве $\tilde{H}_h = H_h \oplus H_h$ векторов вида $\{y_1, y_2\}$, где $y_1, y_2 \in H_h$, и применении теоремы 4.3 для двухслойных схем с самосопряженным оператором.

Пример 4.9. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения колебаний струны

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T; \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad 0 \leq x \leq l; \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

На разностной сетке $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \omega_\tau$, где

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; hN = l\}; \\ \omega_\tau &= \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, K; \tau K = T\}; \end{aligned}$$

аппроксимируем задачу разностной схемой с весами

$$\begin{aligned} y_{i,i}^n &= \sigma_1 y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y_{\bar{x}x,i}^n + \sigma_2 y_{\bar{x}x,i}^{n-1}; \\ i &= 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 1, 2, \dots, K-1; \\ y_i^0 &= u_0(x_i), \quad y_i^1 = \tilde{u}_0(x_i); \quad y_N^n = y_N^0 = 0. \end{aligned}$$

Замечание. Функция $\tilde{u}_0(x_i)$ выбирается исходя из требуемого порядка аппроксимации. Например, при $\sigma_1 = \sigma_2$ порядок аппроксимации по времени должен быть вторым. Покажем, как задается $\tilde{u}_0(x_i)$ для аппроксимации начального условия со вторым порядком. Пусть $u(x, t)$ — достаточно гладкое решение дифференциальной задачи. Тогда можно считать, что дифференциальное уравнение верно и при $t = 0$. Аппроксимируем первую производную функции u по времени в точках $(x_i, 0)$ разностной производной вперед, тогда, опуская аргументы $(x_i, 0)$ функции u и ее производных, получим

$$\begin{aligned} u_{t,i}^0 &= \frac{1}{\tau} \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u \right) + O(\tau^2) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\tau^2) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + 0,5\tau u_{\bar{x}x,i}^0 + O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что разностное уравнение

$$y_{i,i}^0 = \bar{u}_0(x_i) + 0,5\tau y_{\bar{x}x,i}^0$$

имеет второй порядок аппроксимации на решении исходной дифференциальной задачи. Таким образом, достаточно задать

$$\tilde{u}_0(x_i) = u_0(x_i) + \tau \bar{u}_0(x_i) + 0,5\tau^2 (u_0(x_i))_{\bar{x}x}.$$

В пространстве $H_h = \{y(x_i); x_i \in \Omega_h, y_0 = y_N = 0\}$ со скалярным произведением и нормой

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}$$

зададим оператор $A : H_h \rightarrow H_h$:

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0.$$

Как и ранее, обозначая $y_n = (0 \ y_1^n \ y_2^n \ \dots \ y_{N-1}^n \ 0)^T \in H_h$, где $y_i^n = y(x_i, t_n)$, перепишем схему в виде операторного уравнения

$$y_{\bar{t}t} + \sigma_1 A y_{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) A y_n + \sigma_2 A y_{n-1} = 0.$$

Вновь воспользуемся тождеством $y_{n\pm 1} = y_n \pm \tau y_t + 0,5\tau^2 y_{\bar{t}t}$ и приведем уравнение к виду

$$(\sigma_1 - \sigma_2)\tau A y_t + (E + 0,5\tau^2(\sigma_1 + \sigma_2)A)y_{\bar{t}t} + A y_n = 0.$$

Тем самым в канонической форме записи (4.5)

$$B = (\sigma_1 - \sigma_2)\tau A, \quad R = \frac{1}{\tau^2}E + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}A.$$

Учитывая, что операторы $A^* = A > 0$, $R^* = R$ и не зависят от n , для устойчивости схемы согласно теореме 4.5 достаточно выполнения операторных неравенств:

$$\begin{aligned} B \geq 0 &\Leftrightarrow \sigma_1 \geq \sigma_2; \\ R > \frac{1}{4}A &\Leftrightarrow \frac{1}{\tau^2}E + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4}\right)A > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\tau^2}\|y\|^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4}\right)(Ay, y) > 0 \quad \forall y \in H_h. \end{aligned}$$

Поскольку $(Ay, y) < (4/h^2)\|y\|^2$ при всех $y \in H_h$ (см. пункт 3.1.1), последнее неравенство выполняется при условии, что

$$\frac{1}{\tau^2} + \frac{4}{h^2} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{4}\right) \geq 0.$$

Окончательно условия равномерной устойчивости схемы примут вид

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \geq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right), \quad \gamma = \frac{\tau^2}{h^2}.$$

Замечание. Для симметричной схемы ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$) второго порядка аппроксимации условие устойчивости примет вид $\sigma \geq (1 - 1/\gamma)/4$. В частности, явная симметричная схема ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) устойчива при $\tau \leq h$.

Замечание. Методом гармоник можно показать, что те же условия являются необходимыми для устойчивости схемы с весами.

Пример 4.10. На той же разностной сетке, что и в предыдущем примере, рассмотрим уравнение

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau} = \frac{y_{i+1}^n - (y_i^{n+1} + y_i^{n-1}) + y_{i-1}^n}{h^2}, \quad y_0^n = y_N^n = 0.$$

В канонической форме записи уравнение примет вид

$$y_t + \frac{\tau^2}{h^2} y_{tt} + Ay = 0 \Rightarrow B = E, \quad R = \frac{1}{h^2} E.$$

Здесь A — тот же оператор второй разностной производной, что и в предыдущем примере. Условия устойчивости сводятся к выполнению неравенства

$$\frac{1}{h^2} E > \frac{1}{4} A \Leftrightarrow (Ay, y) < \frac{4}{h^2} \|y\|^2 \quad \forall y \in H_h,$$

которое верно при всех h . Отсюда следует абсолютная устойчивость схемы.

Замечание. После приведения к канонической форме легко видеть, что уравнение имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2 + \tau^2/h^2)$ на решении уравнения теплопроводности.

4.4 Экономичные методы решения многомерных нестационарных задач математической физики

4.4.1 Недостатки обычных разностных методов

Рассмотрим краевую задачу для двумерного уравнения теплопроводности в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \in G, 0 < t \leq T; \\ u(x, t) = \mu(x, t), & x \in \partial G, 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in G + \partial G. \end{cases} \quad (4.6)$$

Введем в $\bar{G} = G + \partial G$ равномерную разностную сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= (x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2; \quad h_1 N_1 = l_1, \quad h_2 N_2 = l_2; \\ \omega_h &= \{x_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}; \\ \gamma_h &= \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1j}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\}; \end{aligned}$$

а также сетку по времени

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau; \quad n = 0, 1, \dots, K - 1; \quad \tau K = T\}.$$

Рассмотрим сначала явную схему, аппроксимирующую исходную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} &= \Lambda y_{ij}^n, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad t_n \in \omega_\tau; \\ y_{ij}^{n+1} &= \mu(x_{ij}, t_{n+1}), \quad x_{ij} \in \gamma_h, \quad t_n \in \omega_\tau; \\ y_{ij}^0 &= u_0(x_{ij}), \quad x_{ij} \in \Omega_h. \end{aligned}$$

Здесь $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 y_{ij} = y_{\bar{x}_1 x_1, ij}$, $\Lambda_2 y_{ij} = y_{\bar{x}_2 x_2, ij}$. Достоинством схемы является простота нахождения решения, которое последовательно вычисляется по явной формуле

$$y_{ij}^{n+1} = y_{ij}^n + \tau \Lambda y_{ij}^n \quad (y_{ij}^{n+1}|_{\gamma_h} = \mu_{ij}^{n+1}); \quad n = 0, 1, \dots, K - 1.$$

В пространстве $H_h = \{y(x_{ij}); \quad x_{ij} \in \Omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = 0\}$ со скалярным произведением и нормой

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}; \quad y, v \in H_h$$

введем линейный оператор $A : H_h \rightarrow H_h$, где

$$Ay_{ij} = -\Lambda y_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y|_{\gamma_h} = 0.$$

Напомним, что для самосопряженного положительно определенного оператора A справедлива оценка $(Ay, y) < \Delta \|y\|^2$ при любых $y \in H$, где $\Delta = 4/h_1^2 + 4/h_2^2$ (см. пункт 3.1.1). В каноническом виде однородная разностная задача ($\mu = 0$) примет вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad y_n = y(t_n) \in H_h.$$

Требование выполнения условия устойчивости (см. теорему 4.3):

$$E \geq \frac{\tau}{2} A \Leftrightarrow \|y\|^2 \geq \frac{\tau}{2} (Ay, y) \Leftrightarrow \|y\|^2 \geq \frac{\tau}{2} \Delta \|y\|^2;$$

приводит к неравенству $\tau \leq (1/h_1^2 + 1/h_2^2)^{-1/2}$.

Условие накладывает очень жесткое ограничение на шаг τ . Действительно, пусть, например, $h_1 = h_2 = 0,01$. Тогда устойчивость гарантируется при $\tau \leq 0,25 \cdot 10^{-4}$. Предположим, что надо найти решение разностной задачи при $T = 1$. Тогда надо совершить не менее чем $n = T/\tau \geq 40000$ шагов по времени. На практике зачастую возникает необходимость находить решение на существенно большие моменты времени, и вычисления с таким мелким шагом оказываются неприемлемыми.

Замечание. По указанной причине при решении уравнений параболического типа явные схемы используются редко. В случае же уравнения гиперболического типа условия устойчивости позволяют использовать шаг по времени того же порядка, что и шаги по пространству (см. пример 4.9). Поэтому для гиперболических уравнений явные разностные схемы используются гораздо чаще, чем для параболических.

Теперь рассмотрим неявную схему:

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \Lambda y_{ij}^{n+1}, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad t_n \in \omega_\tau;$$

$$y_{ij}^{n+1} = \mu(x_{ij}, t_{n+1}), \quad x_{ij} \in \gamma_h, \quad t_n \in \omega_\tau;$$

$$y_{ij}^0 = u_0(x_{ij}), \quad x_{ij} \in \Omega_h.$$

В каноническом виде однородная разностная задача примет вид

$$(E + \tau A) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0,$$

а условие устойчивости $E + \tau A \geq (\tau/2)A$ выполнено при всех τ , что означает абсолютную устойчивость схемы. Однако для нахождения решения по неявной схеме на каждом шаге по времени необходимо решать систему $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ уравнений вида

$$(E - \tau A)y_{ij}^{n+1} = F_{ij}^n, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad (F_{ij}^n = y_{ij}^n);$$

$$y_{ij}^{n+1} = \mu_{ij}^{n+1}, \quad x_{ij} \in \gamma_h.$$

Решение подобных систем уравнений (см. главу 3) представляет значительную трудность вследствие большой размерности системы. Так, например, если $h_1 = h_2 = 0,01$ и $l_1 = l_2 = 1$, то число неизвестных y_{ij} в системе окажется равным примерно 10000.

В следующем пункте будет рассмотрен метод решения задачи (4.6), сочетающий положительные стороны явной и неявной схем — простоту нахождения решения и абсолютную устойчивость. Метод основан на сведении многомерной задачи к последовательности одномерных задач. Подобные методы известны под различными названиями: *методы переменных направлений, дробных шагов, расщепления, локально-одномерные методы.*

4.4.2 Пример метода переменных направлений

Рассмотрим одну из разностных схем метода переменных направлений для уравнения (4.6), называемую *продольно-поперечной разностной схемой* или *схемой Писмена-Рэчфорда* [8]. В этой схеме переход к следующему временному слою осуществляется в два этапа. На каждом этапе уравнения являются неявными только по одной из переменных:

$$\begin{aligned} \frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{ij}^n}{0,5\tau} &= \Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 y_{ij}^n, \quad x_{ij} \in \omega_h; \\ \frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+1/2}}{0,5\tau} &= \Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 y_{ij}^{n+1}, \quad x_{ij} \in \omega_h. \end{aligned} \quad (4.7)$$

На первом этапе определяются промежуточные значения $y_{ij}^{n+1/2}$ из уравнений

$$\begin{aligned} (E - 0,5\tau\Lambda_1)y_{ij}^{n+1/2} &= (E + 0,5\tau\Lambda_2)y_{ij}^n; \\ y_{0j}^{n+1/2}, y_{N_1j}^{n+1/2} &\text{ будут определены далее.} \end{aligned}$$

При каждом фиксированном $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ имеем систему с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки. Тем самым для реализации первого этапа требуется $O(N_2N_1)$ арифметических действий.

На втором этапе, пользуясь найденными значениями $y_{ij}^{n+1/2}$, вычисляются значения y_{ij}^{n+1} из уравнений

$$\begin{aligned} (E - 0,5\tau\Lambda_2)y_{ij}^{n+1} &= (E + 0,5\tau\Lambda_1)y_{ij}^{n+1/2}; \\ y_{i0}^{n+1} &= \mu(x_{i0}, t_{n+1}), \quad y_{iN_2}^{n+1} = \mu(x_{iN_2}, t_{n+1}). \end{aligned}$$

При каждом фиксированном $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ уравнения решаются прогонкой по j . Для этого требуется $O(N_1N_2)$ операций.

Таким образом, для осуществления шага по времени в продольно-поперечной схеме требуется $O(N_1N_2)$ арифметических действий.

Замечание. В частности, при $N_1 = N_2 = N$ необходимо $O(N^2)$ действий. Для сравнения, переход к новому временному слою в неявной схеме из предыдущего пункта с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье требует $O(N^2 \ln N)$ операций (см. пункт 3.6.3). Поэтому продольно-поперечная схема относится к экономичным методам решения задачи (4.6).

Для дальнейшего исследования схемы исключим из уравнений (4.7) промежуточные значения $y_{ij}^{n+1/2}$. Для этого рассмотрим разность и сумму урав-

нений (4.7):

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - 2y_{ij}^{n+1/2} + y_{ij}^n}{0,5\tau} = \Lambda_2(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n),$$

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{0,5\tau} = 2\Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2(y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^n).$$

Из первого уравнения выразим $y_{ij}^{n+1/2}$:

$$y_{ij}^{n+1/2} = \frac{y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^n}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n), \quad (4.8)$$

после чего подставим $y_{ij}^{n+1/2}$ во второе уравнение. Получим

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda(y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^n) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n).$$

Последнее равенство справедливо для всех $x_{ij} \in \omega_h$, если согласно уравнению (4.8) при каждом $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ определить

$$y_{0j}^{n+1/2} = \frac{\mu_{0j}^{n+1} + \mu_{0j}^n}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{0j}^{n+1} - \mu_{0j}^n);$$

$$y_{N_1j}^{n+1/2} = \frac{\mu_{N_1j}^{n+1} + \mu_{N_1j}^n}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu_{N_1j}^{n+1} - \mu_{N_1j}^n).$$

Тем самым описание алгоритма завершено и получена двуслойная схема, эквивалентная продольно-поперечной.

4.4.3 Абсолютная устойчивость продольно-поперечной схемы

Для исследования устойчивости продольно-поперечной схемы рассмотрим соответствующую ей однородную разностную задачу:

$$\frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda(y_{ij}^{n+1} + y_{ij}^n) - \frac{\tau}{4}\Lambda_1\Lambda_2(y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^n), \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad t_n \in \omega_\tau;$$

$$y_{ij}^{n+1} = 0, \quad x_{ij} \in \gamma_h, \quad t_n \in \omega_\tau;$$

$$y_{ij}^0 = u_0(x_{ij}), \quad x_{ij} \in \Omega_h.$$

В введенном ранее пространстве $H_h = \{y(x_{ij}); x_{ij} \in \Omega_h, y|_{\gamma_h} = 0\}$ зададим операторы A_1, A_2 и A равенствами:

$$A_1 y_{ij} = -\Lambda_1 y_{ij}, \quad A_2 y_{ij} = -\Lambda_2 y_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad y|_{\gamma_h} = 0; \quad A = A_1 + A_2.$$

Обозначая $y_n = y(t_n) \in H_h$, в операторной форме записи схема примет вид

$$\left(E + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2\right) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \frac{1}{2} A(y_n + y_{n+1}) = 0, \quad (4.9)$$

откуда получим канонический вид схемы

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0, \quad B = E + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 + \frac{\tau}{2} A.$$

Учитывая, что $A^* = A > 0$, условие $B \geq 0,5\tau A$, достаточное для устойчивости схемы, примет вид

$$E + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 + \frac{\tau}{2} A \geq \frac{\tau}{2} A.$$

Это условие выполняется при любых τ , h_1 и h_2 , поскольку оператор $A_1 A_2$ положительно определен. Действительно, для произвольных $y \in H_h$, используя лемму 3.1, с учетом равенства $y|_{\gamma_h} = 0$, получим

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 y, y) &= \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 \sum_{i=1}^{N_1-1} (y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_1 x_1 y})_{ij} h_1 = - \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 \sum_{i=1}^{N_1} (y_{\bar{x}_2 x_2 \bar{x}_1 y_{\bar{x}_1})_{ij} h_1 = \\ &= - \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2-1} (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_2 y_{\bar{x}_1})_{ij} h_2 = \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2} (y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2})_{ij}^2 h_2 \Rightarrow A_1 A_2 > 0. \end{aligned}$$

Тем самым доказана абсолютная устойчивость схемы.

Замечание. Из операторной формы записи (4.9) легко видеть, что продольно-поперечная схема имеет погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ на решении задачи (4.6), поскольку отбрасывая операторное слагаемое $(\tau^2/4)A_1 A_2$, получим симметричную схему второго порядка. Из аппроксимации и абсолютной устойчивости (см. теорему 2.9) вытекает сходимость продольно-поперечной схемы и оценка погрешности в сеточной норме L_2 :

$$\|y_n - u(t_n)\|_{H_h} = \left(\sum_{x_{ij} \in \omega_h} (y_{ij}^n - u(x_{ij}, t_n))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \leq M(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2),$$

где $n = 1, 2, \dots, K$; M — некоторая постоянная, не зависящая от τ , h_1 и h_2 .

4.4.4 Понятие суммарной аппроксимации

При получении двуслойной схемы, эквивалентной продольно-поперечной схеме, предполагалось, что G — прямоугольная область. Это позволило

специальным образом определить граничные условия для вспомогательной функции $y_{ij}^{n+1/2}$. Если область G не является прямоугольником, получение эквивалентной двуслойной схемы может оказаться невозможным. В этом случае схемы переменных направлений можно исследовать непосредственно, не исключая промежуточных значений $y_{ij}^{n+1/2}$. Для этого необходимо ввести понятие *суммарной аппроксимации*, которое мы поясним на примере продольно-поперечной схемы.

Пусть $u(x_1, x_2, t)$ — точное решение задачи (4.6). Рассмотрим погрешности приближенного решения:

$$z_{ij}^n = y_{ij}^n - u_{ij}^n, \quad z_{ij}^{n+1/2} = y_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^{n+1/2} \quad (x_{ij} \in \Omega_h, \quad t_n \in \omega_\tau).$$

Здесь $u_{ij}^n = u(x_{1,i}, x_{2,j}, t_n)$, $u_{ij}^{n+1/2} = u(x_{1,i}, x_{2,j}, t_n + 0,5\tau)$. Для продольно-поперечной схемы погрешности удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{z_{ij}^{n+1/2} - z_{ij}^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 z_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 z_{ij}^n + \psi_{1,ij}^n, \quad x_{ij} \in \omega_h;$$

$$\frac{z_{ij}^{n+1} - z_{ij}^{n+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_1 z_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 z_{ij}^{n+1} + \psi_{2,ij}^n, \quad x_{ij} \in \omega_h.$$

Погрешности аппроксимации ψ_1^n , ψ_2^n на решении u имеют вид:

$$\psi_{1,ij}^n = -\frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n}{0,5\tau} + \Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^n,$$

$$\psi_{2,ij}^n = -\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{0,5\tau} + \Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^{n+1}.$$

Далее удобно использовать обозначения $L_\alpha u = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2$, $\alpha = 1, 2$, тогда уравнение (4.6) примет вид $\partial u / \partial t = (L_1 + L_2)u$. Разлагая функции в выражениях для ψ_1^n , ψ_2^n по формуле Тейлора в точке $(x_{1,i}, x_{2,j}, t_n)$ (далее эти аргументы у функции u и ее производных опускаются) и заменяя разностные пространственные производные дифференциальными, получим:

$$\begin{aligned} \psi_{1,ij}^n &= -\frac{2}{\tau} \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u \right) + \\ &+ L_1 \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + L_2 u + O(\tau^2 + h^2) = \\ &= -\frac{\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau}{2} L_1 \frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau + h^2); \\ \psi_{2,ij}^n &= -\frac{2}{\tau} \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L_1 \left(u + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + L_2 \left(u + \tau \frac{\partial u}{\partial t} \right) + O(\tau^2 + h^2) = \\
& = -\frac{3\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\tau}{2} L_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \tau L_2 \frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau + h^2).
\end{aligned}$$

Таким образом, каждое из уравнений (4.7) аппроксимирует исходное уравнение (4.6) с первым порядком по τ и вторым — по h . Вместе с тем сумма погрешностей аппроксимации ψ_1^n и ψ_2^n имеет второй порядок по τ и по h :

$$\psi_{ij}^n = \psi_{1,ij}^n + \psi_{2,ij}^n = \tau \underbrace{\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (L_1 + L_2) \frac{\partial u}{\partial t} \right)}_{(\dots)=0} + O(\tau^2 + h^2) = O(\tau^2 + h^2).$$

Поэтому говорят, что продольно-поперечная схема обладает суммарной аппроксимацией второго порядка по τ и по h .

Замечание. Можно получить оценку погрешности z^n приближенного решения через норму функции $\psi = \psi_1 + \psi_2$, из которой будет следовать второй порядок точности схемы.

4.5 Задачи к главе 4

Задача 4.1. Привести разностную схему

$$\begin{aligned}
y_i^{n+1} &= (0,5 + \gamma)(y_{i+1}^n + y_{i-1}^n) - 2\gamma y_i^n, \quad \gamma = \tau/h^2; \\
i &= 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = l; \quad n = 0, 1, \dots, K-1; \quad \tau K = T; \\
y_0^n &= y_N^n = 0; \quad y_i^0 = u_0(ih)
\end{aligned}$$

к каноническому виду, выяснить порядок аппроксимации и исследовать устойчивость по начальным данным.

Ответ: Канонический вид схемы:

$$\begin{aligned}
\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau'} + Ay_n &= 0, \quad \tau' = h^2(0,5 + \gamma); \\
Ay_i &= -y_{\bar{x}x,i}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0.
\end{aligned}$$

Схема абсолютно неустойчива и аппроксимирует уравнение теплопроводности с погрешностью $O(\tau + h^2 + h^2/\tau)$.

Задача 4.2. Привести разностную схему

$$\begin{aligned}
(1 + 2\gamma)y_i^{n+1} &= (1 - 2\gamma)y_i^{n-1} + 2\gamma(y_{i+1}^n + y_{i-1}^n), \quad \gamma = \tau/h^2; \\
i &= 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = l; \quad n = 1, 2, \dots, K-1; \quad \tau K = T;
\end{aligned}$$

$$y_0^n = y_N^n = 0; y_i^0 = u_0(ih); y_i^1 = \bar{u}_0(ih)$$

к каноническому виду, выяснить порядок аппроксимации и исследовать устойчивость по начальным данным.

Ответ: Канонический вид схемы:

$$By_{\bar{x}} + \tau^2 R y_{\bar{x}} + Ay_n = 0;$$

$$B = E; R = \frac{1}{h^2}E; Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}; i = 1, 2, \dots, N-1; y_0 = y_N = 0.$$

Схема абсолютно устойчива и аппроксимирует уравнение колебаний с погрешностью $O(\tau^2 + h^2 + \tau^2/h^2)$.

Задача 4.3. Исследовать устойчивость по начальным данным разностной схемы

$$y_{i,i}^n = a^2 y_{\bar{x}x,i}^n, a = \text{const.}$$

Замечание. Здесь и в последующих примерах, где это не вызывает недоумений, полная постановка разностной задачи не приводится.

Ответ: Схема устойчива при $\tau \leq h^2/(2a^2)$.

Задача 4.4. Доказать абсолютную устойчивость схемы

$$y_{i,i}^n = 0,5 (y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + y_{\bar{x}x,i}^n).$$

Выяснить порядок аппроксимации и указать метод решения разностного уравнения.

Ответ: В канонической форме записи схема примет вид:

$$\left(E + \frac{\tau}{2}A\right) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0;$$

$$Ay_i = -y_{\bar{x}x,i}; i = 1, 2, \dots, N-1; y_0 = y_N = 0;$$

откуда следует абсолютная устойчивость схемы. Схема аппроксимирует уравнение теплопроводности с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$, решение на каждом временном слое находится методом прогонки.

Задача 4.5. Найти достаточное условие устойчивости разностной схемы

$$y_{i,i}^n = (ay_{\bar{x}})_{x,i}^n, 0 < a_* \leq a_i^n \leq a^*.$$

Ответ: Схема устойчива при $\tau \leq h^2/(2a^*)$.

Задача 4.6. Пусть $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ — равномерная сетка, введенная в пункте 4.4.1 в прямоугольнике G . Выяснить погрешность аппроксимации и найти достаточное условие устойчивости разностной схемы:

$$y_{t,ij}^n = y_{\bar{x}_1 x_1, ij}^n + y_{\bar{x}_2 x_2, ij}^n, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad t_n \in \omega_\tau;$$

$$y_{ij}^{n+1} \Big|_{\gamma_h} = 0, \quad y_{ij}^0 \Big|_{\Omega_h} = u_0(x_{ij}).$$

Ответ: Схема аппроксимирует двумерное уравнение теплопроводности с погрешностью $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$. Каноническая форма записи схемы:

$$(E + \tau A_2) \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0, \quad A = A_1 + A_2;$$

$$A_1 y_{ij} = -y_{\bar{x}_1 x_1, ij}, \quad A_2 y_{ij} = -y_{\bar{x}_2 x_2, ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad y_{ij} \Big|_{\gamma_h} = 0.$$

Условие $\tau \leq h_1^2/2$ является достаточным для устойчивости схемы.

Задача 4.7. Пусть $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$ — равномерная сетка, введенная в пункте 4.4.1 в прямоугольнике G . Для схемы переменных направлений

$$\frac{y_{ij}^{n+1/2} - y_{ij}^n}{\tau} = \Lambda_1 y_{ij}^{n+1/2}, \quad \frac{y_{ij}^{n+1} - y_{ij}^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 y_{ij}^{n+1}, \quad x_{ij} \in \omega_h, \quad t_n \in \omega_\tau;$$

$$y_{ij}^{n+1} \Big|_{\gamma_h} = \mu(x_{ij}, t_{n+1}), \quad y_{ij}^0 \Big|_{\Omega_h} = u_0(x_{ij}) \quad (\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2)$$

найти погрешности аппроксимации каждого уравнения и выяснить порядок суммарной аппроксимации. Задать граничные условия для $y^{n+1/2}$, исключить $y^{n+1/2}$ и исследовать устойчивость полученной схемы.

Ответ: Погрешности аппроксимации уравнений: $\psi_{1,ij}^n = O(1)$, $\psi_{2,ij}^n = O(1)$. Тем самым каждое из уравнений в отдельности не аппроксимирует двумерное уравнение теплопроводности. Однако $\psi_{ij}^n = \psi_{1,ij}^n + \psi_{2,ij}^n = O(\tau + h^2)$, то есть схема имеет первый порядок суммарной аппроксимации по τ и второй — по h . Если задать граничные условия для $y^{n+1/2}$ в виде

$$y_{0j}^{n+1/2} = (E - \tau \Lambda_2) \mu_{0j}^{n+1}, \quad y_{N_1 j}^{n+1/2} = (E - \tau \Lambda_2) \mu_{N_1 j}^{n+1},$$

то после исключения $y^{n+1/2}$ получим эквивалентную двуслойную схему

$$B \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0,$$

$$B = E - \tau(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2, \quad A = \tau \Lambda_1 \Lambda_2 - (\Lambda_1 + \Lambda_2).$$

Двуслойная схема абсолютно устойчива, и, как легко видеть из канонической формы записи, имеет погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Глава 5

Разностные схемы для нелинейных задач математической физики

5.1 Квазилинейное уравнение теплопроводности

5.1.1 Исходное уравнение

Уравнение теплопроводности выражает закон сохранения тепла и в общем случае имеет вид (см. [9])

$$c \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} w = f.$$

Здесь $u = u(x, t)$ — температура, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — совокупность пространственных переменных, t — время, $c(x, t, u) > 0$ — удельная теплоемкость, $w(x, t, u)$ — тепловой поток, $f(x, t, u)$ — удельная плотность источников тепла.

С учетом закона Фурье $w = -k \operatorname{grad} u$, где $k(x, t, u) > 0$ — коэффициент теплопроводности, уравнение примет вид

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + f.$$

В дальнейшем ограничимся одномерным случаем и будем считать, что среда однородна, то есть функции c , k и f не зависят явным образом от переменных x и t . В результате придем к уравнению

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u),$$

которое называется *квазилинейным уравнением теплопроводности*. Это уравнение можно упростить путем замены неизвестной функции

$$v = v(u) = \int_0^u c(s) ds \quad (u \geq 0) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial u} = c(u) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k(u)}{c(u)} \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u).$$

В результате уравнение примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{k}(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tilde{f}(v), \quad \text{где } \tilde{k}(v) = \frac{k(u(v))}{c(u(v))}, \quad \tilde{f}(v) = f(u(v)).$$

Здесь функция $u(v)$ является обратной к возрастающей на $[0; +\infty)$ функции $v(u)$. Возвращаясь к прежним обозначениям, далее будем рассматривать квазилинейное уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u).$$

5.1.2 Автомодельные решения

Для тестирования разностных методов важно иметь набор точных решений исходной дифференциальной задачи, отражающих ее характерные свойства. В качестве таковых в ряде случаев могут быть построены так называемые *автомодельные решения*. Термин «автомодельное» буквально означает «самоподобное». Построение автомодельных решений осуществляется путем сведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно переменной, представляющей собой некоторую комбинацию исходных независимых переменных (подробнее см., например, [10]).

Построим семейство автомодельных решений квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad k(u) = \kappa_0 u^\sigma \quad (\sigma > 0, \kappa_0 > 0),$$

предполагая степенную зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Будем искать решения уравнения типа *бегущей волны*:

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = Dt - x,$$

где D — постоянная, подлежащая определению. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = Du', \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -u', \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (ku)',$$

где штрихом обозначена производная по переменной ξ . Приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое легко интегрируется:

$$Du' = (ku)' \Leftrightarrow Du = k(u)u' + c_1 \quad (c_1 = \text{const}, \text{ полагаем } c_1 = 0);$$

$$Du = \kappa_0 u^\sigma u' \Leftrightarrow d\xi = \frac{\kappa_0}{D} u^{\sigma-1} du \Leftrightarrow \xi = \frac{\kappa_0}{D\sigma} u^\sigma + c_2 \quad (\text{полагаем } c_2 = 0).$$

Тем самым при $\xi \geq 0$ определено решение

$$u(\xi) = \left(\frac{\sigma D}{\kappa_0} \right)^{1/\sigma} \xi^{1/\sigma}, \quad \xi \geq 0.$$

При $\xi < 0$ определим решение $u(\xi)$ значением $u(0) = 0$, то есть положим

$$u(\xi) = u(0) = 0, \quad \xi < 0.$$

Тогда, учитывая, что $\xi = Dt - x$, функция

$$u(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma D}{\kappa_0} \right)^{1/\sigma} (Dt - x)^{1/\sigma}, & x \leq Dt; \\ 0, & x > Dt; \end{cases} \quad (5.1)$$

может рассматриваться в качестве решения следующей задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x > 0, \quad t > 0;$$

$$u(0, t) = u_0 t^{1/\sigma}, \quad u(\infty, t) = 0, \quad t \geq 0;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$

Здесь использовано обозначение $u_0 = (\sigma D^2 / \kappa_0)^{1/\sigma}$. При заданных значениях параметров κ_0 , σ и u_0 нахождение решения вида (5.1) этой задачи сводится к определению постоянной $D = \sqrt{\kappa_0 u_0^\sigma / \sigma}$.

Решение (5.1) представляет собой *температурную волну* (см. рис.5.1), распространяющуюся с постоянной скоростью D по нулевому начальному фону. Точка $x = Dt$ называется *фронтом температурной волны*.

Отметим характерные свойства решения (5.1). На фронте температурной волны левая производная температуры

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \left(\frac{\sigma D}{\kappa_0} \right)^{1/\sigma} \frac{1}{\sigma} (Dt - x)^{1/\sigma - 1}$$

бесконечна при $\sigma > 1$, конечна при $\sigma = 1$ и равна нулю при $0 < \sigma < 1$. Тепловой поток на фронте волны

$$w = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x} = -\kappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = D \left(\frac{\sigma D}{\kappa_0} \right)^{1/\sigma} (Dt - x)^{1/\sigma}$$

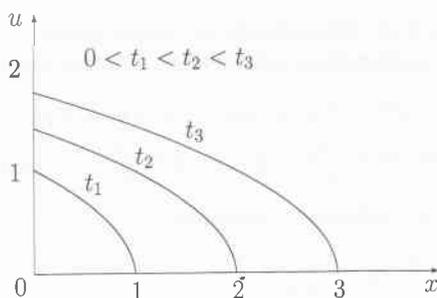


Рис. 5.1. Температурная волна ($\sigma = 2$)

равен нулю и является непрерывным при любых $\sigma > 0$. Вторая производная

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\sigma D}{\kappa_0}\right)^{1/\sigma} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) (Dt - x)^{1/\sigma - 2}$$

на фронте температурной волны непрерывна при $0 < \sigma < 0,5$ и разрывна при $\sigma \geq 0,5$. Тем самым при $\sigma \geq 0,5$ функцию (5.1) необходимо рассматривать в качестве обобщенного решения сформулированной задачи.

5.2 Разностные схемы для уравнений с переменными коэффициентами и нелинейного уравнения теплопроводности

5.2.1 Уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\rho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T;$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t); \quad u(x, 0) = u_0(x);$$

где $\rho(x, t)$, $k(x, t)$, $f(x, t)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \quad \rho(x, t) \geq c_3 > 0.$$

Разностные схемы, аппроксимирующие рассматриваемую задачу, можно строить различными способами. Воспользуемся одним из таких способов,

получившим название *интегро-интерполяционный метод* или *метод баланса*. Рассмотрим сначала стационарное уравнение

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (q(x) \geq 0).$$

Введем на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку с шагом h . Совместно с узлами сетки x_i будем рассматривать точки $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0,5h$. Проинтегрировав уравнение по отрезку $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, получим

$$w_{i-1/2} - w_{i+1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)dx,$$

где $w_{i\pm 1/2} = -k(x_{i\pm 1/2})u'(x_{i\pm 1/2})$ — тепловой поток на границах отрезка, $f(x)$ — плотность внешних источников тепла, $q(x)u(x)$ — мощность стоков тепла. Полученное уравнение представляет собой интегральное соотношение баланса тепла на отрезке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$.

Используя простейшую интерполяцию, интеграл в правой части заменим его приближенным значением

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)dx \approx hd_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)dx.$$

Проинтегрируем соотношение $u'(x) = -w(x)/k(x)$ по отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ и вновь заменим интеграл приближенным значением

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)} dx \approx ha_i^{-1} w_{i-1/2}, \quad a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}.$$

Получили приближенные равенства $w_{i-1/2} \approx -a_i u_{x,i}$, $w_{i+1/2} \approx -a_{i+1} u_{x,i}$. Подставляя приближенные выражения в интегральное соотношение баланса, получим разностное уравнение

$$\frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] - d_i u_i = -\varphi_i, \quad \text{где } \varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)dx.$$

Интегралы, определяющие коэффициенты a_i , d_i и φ_i построенной разностной схемы, также можно заменять приближенными значениями. Так, например, используя формулу трапеций, получим

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \approx \left(\frac{0,5}{k(x_{i-1})} + \frac{0,5}{k(x_i)} \right)^{-1} = \frac{2k(x_{i-1})k(x_i)}{k(x_{i-1}) + k(x_i)}.$$

Замечание. Интегро-интерполяционный метод приводит к построению семейства так называемых консервативных схем, то есть схем, для которых выполняются разностные аналоги интегральных законов сохранения, присущих исходной задаче.

Перейдем к построению схемы для нестационарного уравнения. Исходя из предыдущего, аппроксимируем дифференциальное выражение

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

при каждом фиксированном t в точке (x_i, t) разностным отношением

$$\Lambda(t)y_i = (a(x_i, t)y_x)_{x_i} = \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right].$$

Найдем условия, обеспечивающие второй порядок аппроксимации на любой достаточно гладкой функции $u(x, t)$. Вводя обозначения

$$u = u(x_i, t), \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t), \quad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t), \quad u''' = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t)$$

и используя разложения по формуле Тейлора, получим

$$\begin{aligned} \Lambda(t)u &= \frac{1}{h} \left[a_{i+1} \frac{hu' + \frac{h^2}{2}u'' + \frac{h^3}{6}u'''}{h} - a_i \frac{hu' - \frac{h^2}{2}u'' + \frac{h^3}{6}u'''}{h} \right] + O(h^2) = \\ &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h} u' + \frac{a_{i+1} + a_i}{2} u'' + \frac{a_{i+1} - a_i}{h} \frac{h^2}{6} u''' + O(h^2). \end{aligned}$$

Отсюда получим условия второго порядка аппроксимации:

$$\begin{aligned} \frac{a(x_{i+1}, t) + a(x_i, t)}{2} &= k(x_i, t) + O(h^2), \\ \frac{a(x_{i+1}, t) - a(x_i, t)}{h} &= \frac{\partial k}{\partial x}(x_i, t) + O(h^2). \end{aligned}$$

Коэффициенты $a(x_i, t)$, удовлетворяющие указанным условиям, можно выбирать различными способами. Чаше прочих используется одно из следующих выражений:

$$\begin{aligned} a(x_i, t) &= 0,5(k(x_{i-1}, t) + k(x_i, t)), \\ a(x_i, t) &= k(x_i - h/2, t), \\ a(x_i, t) &= \frac{2k(x_{i-1}, t)k(x_i, t)}{k(x_{i-1}, t) + k(x_i, t)}. \end{aligned}$$

На равномерной сетке по пространству и времени рассмотрим разностную схему с весами, аппроксимирующую рассматриваемую задачу:

$$\rho(x_i, t) \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \Lambda(t)(\sigma y_i^{n+1} + (1 - \sigma)y_i^n) + f(x_i, t);$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1; hN = 1;$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}); y_i^0 = u_0(x_i).$$

Здесь можно выбрать любое значение $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Схема имеет второй порядок аппроксимации по τ и по h , если $t = t_n + 0,5\tau$, $\sigma = 0,5$. При прочих значениях σ и t — первый порядок аппроксимации по τ и второй — по h .

В пункте 2.5 с помощью принципа замороженных коэффициентов было показано, что явная схема ($\sigma = 0$) устойчива при условии $\tau \leq (c_3 h^2)/(2c_2)$ (см. пример 2.4), диктующем жесткие ограничения на выбор шага по времени. Это неравенство также является условием монотонности схемы (см. пример 2.3).

Ограничений на выбор шага по времени можно избежать за счет использования неявной схемы при $\sigma \geq 0,5$. Действительно, в пункте 4.2.3 была показана абсолютная устойчивость схемы с весами при $\sigma \geq 0,5$ для случая постоянных коэффициентов (см. пример 4.7). В соответствии с принципом замороженных коэффициентов (см. пункт 2.5) схема с переменными коэффициентами также абсолютно устойчива при этом условии. Заметим, что при $\sigma = 1$ схема с переменными коэффициентами является монотонной при любых $\rho(x_i, t) > 0$, $a(x_i, t) > 0$.

5.2.2 Нелинейное уравнение теплопроводности

Рассмотрим теперь первую краевую задачу для нелинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T;$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t); \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Поскольку коэффициент теплопроводности $k(u)$ зависит от решения, пределы его изменения заранее не известны. Поэтому при использовании явных схем затруднительно проверить заранее выполнение условия устойчивости. Будем рассматривать следующие абсолютно устойчивые неявные схемы.

1. Чисто неявная линейная схема.

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = (a(y_i^n) y_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i} + f(y_i^n);$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}); y_i^0 = u_0(x_i).$$

Напомним, что

$$(a(y_i^n) y_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i} = \frac{1}{h} \left(a(y_{i+1}^n) \frac{y_i^{n+1} - y_i^{n+1}}{h} - a(y_i^n) \frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} \right),$$

$$a(y_i^n) = 0,5(k(y_{i-1}^n) + k(y_i^n)) \text{ (один из возможных вариантов).}$$

Схема имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй порядок по h . Преимуществом схемы является линейное вхождение решения на верхнем слое. Решение y_i^{n+1} при $i = 1, 2, \dots, N-1$ находится методом прогонки.

2. Чисто неявная нелинейная схема

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = (a(y_i^{n+1}) y_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i} + f(y_i^{n+1});$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}); y_i^0 = u_0(x_i).$$

Разностная схема представляет собой систему нелинейных разностных уравнений. Для отыскания решения y_i^{n+1} необходимо на каждом временном слое применить тот или иной итерационный метод. Например, следующий:

$$\frac{y_i^{(s+1)} - y_i^n}{\tau} = (a(y_i^{(s)}) y_{\bar{x}}^{(s+1)})_{x,i} + f(y_i^{(s)});$$

$$y_0^{(s+1)} = \mu_1(t_{n+1}), y_N^{(s+1)} = \mu_2(t_{n+1});$$

$$y_i^{(0)} = y_i^n; s = 0, 1, \dots, M-1; y_i^{n+1} = y_i^{(M)}.$$

Здесь s — номер итерации. Значения $y_i^{(s+1)}$ при $i = 1, 2, \dots, N-1$ находятся методом прогонки. Заметим, что при $M = 1$ получим предыдущую схему. Это позволяет считать нелинейную схему в совокупности с описанным итерационным процессом некоторым уточнением предыдущей схемы.

3. Схема предиктор–корректор второго порядка аппроксимации.

Здесь переход к следующему временному слою осуществляется в два этапа. На первом этапе с помощью чисто неявной линейной схемы находятся промежуточные значения $y_i^{n+1/2}$:

$$\frac{y_i^{n+1/2} - y_i^n}{0,5\tau} = (a(y_i^n) y_{\bar{x}}^{n+1/2})_{x,i} + f(y_i^n);$$

$$y_0^{n+1/2} = \mu_1(t_n + 0,5\tau), y_N^{n+1/2} = \mu_2(t_n + 0,5\tau).$$

На втором этапе используется симметричная схема, в которой нелинейные коэффициенты $a(y)$, $f(y)$ вычисляются при $y = y_i^{n+1/2}$:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left((a(y_i^{n+1/2}) y_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i} + (a(y_i^{n+1/2}) y_{\bar{x}}^n)_{x,i} \right) + f(y_i^{n+1/2});$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}).$$

На каждом из этапов уравнения решаются методом прогонки.

Замечание. Схема аналогична методу Рунге-Кутты

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = f\left(y^n + \frac{\tau}{2}f(y^n)\right)$$

для обыкновенного дифференциального уравнения $u' = f(u)$. Для погрешности аппроксимации метода на решении $u(t)$ справедливо представление

$$\psi(t_n) = -u' - \frac{\tau}{2}u'' + f(u) + f'(u)\frac{\tau}{2}f(u) + O(\tau^2) = O(\tau^2),$$

поскольку из уравнения следует, что $u'' = f'(u)u' = f'(u)f(u)$. Так же показывается второй порядок аппроксимации по τ схемы предиктор-корректор.

5.3 Разностная схема для нелинейного эллиптического уравнения

5.3.1 Исходная задача и разностная схема.

Линеаризованное уравнение для погрешности

Рассмотрим краевую задачу для слабо нелинейного эллиптического уравнения в прямоугольнике $G = \{0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$ с границей ∂G :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x, u), & x = (x_1, x_2) \in G; \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial G. \end{cases}$$

Здесь, по-прежнему, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа.

Введем в $\bar{G} = G + \partial G$ равномерную разностную сетку $\Omega_h = \omega_h \cup \gamma_h$:

$$x_{ij} = (x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2; \quad h_1 N_1 = l_1, \quad h_2 N_2 = l_2;$$

$$\omega_h = \{x_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\};$$

$$\gamma_h = \{x_{i0}, x_{iN_2}, x_{0j}, x_{N_1j}; \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1\};$$

и сопоставим краевой задаче разностную схему:

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}, y_{ij}), & x_{ij} \in \omega_h; \\ y_{ij} = \mu(x_{ij}), & x_{ij} \in \gamma_h. \end{cases} \quad (5.2)$$

Здесь, как и ранее, $\Delta_h y_{ij} = (y_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2})_{ij}$ — пятиточечный разностный оператор Лапласа. Разностная схема представляет собой систему *нелинейных* разностных уравнений.

Рассмотрим погрешность решения разностной задачи $z_{ij} = y_{ij} - u(x_{ij})$, $x_{ij} \in \Omega_h$, удовлетворяющую уравнениям:

$$\Delta_h z_{ij} = -\Delta_h u_{ij} - f(x_{ij}, u_{ij} + z_{ij}), \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad z_{ij} = 0, \quad x_{ij} \in \gamma_h.$$

Эти уравнения при $x_{ij} \in \omega_h$ нелинейны относительно z_{ij} , однако их можно линеаризовать, воспользовавшись формулой Лагранжа:

$$f(x_{ij}, u_{ij} + z_{ij}) = f(x_{ij}, u_{ij}) + f'_u(x_{ij}, \bar{y}_{ij})z_{ij}; \\ \bar{y}_{ij} = u_{ij} + \theta_{ij}z_{ij}, \quad \theta_{ij} \in (0; 1).$$

Здесь и далее будем использовать обозначение $f'_u(x, u) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)$. Приходим к *линеаризованным* уравнениям для погрешности:

$$\Delta_h z_{ij} + f'_u(x_{ij}, \bar{y}_{ij})z_{ij} = -\psi_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad z_{ij} = 0, \quad x_{ij} \in \gamma_h; \quad (5.3)$$

где сеточная функция $\psi_{ij} = \Delta_h u_{ij} + f(x_{ij}, u_{ij})$ представляет собой погрешность аппроксимации разностных уравнений на решении дифференциальной задачи и является величиной $O(h_1^2 + h_2^2)$.

5.3.2 Оценка погрешности в равномерной метрике

Получим оценку погрешности z_{ij} , воспользовавшись принципом максимума (см. пункт 2.2). Для этого запишем линеаризованные уравнения для погрешности (5.3) в каноническом виде (2.3):

$$A(x)z(x) = \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi)z(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h; \quad z(x) = 0, \quad x \in \gamma_h;$$

где $x = x_{ij}$, $\Pi(x) = \{x, x_{i\pm 1j}, x_{ij\pm 1}\}$ — пятиточечный шаблон уравнений, $\Pi'(x) = \Pi(x) \setminus \{x\}$ — окрестность узла x . Коэффициенты и правая часть уравнения определяются формулами:

$$A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} - f'_u(x, \bar{y}), \quad B(x, x_{i\pm 1j}) = \frac{1}{h_1^2}, \quad B(x, x_{ij\pm 1}) = \frac{1}{h_2^2}, \\ D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \Pi'(x)} B(x, \xi) = -f'_u(x, \bar{y}), \quad F(x) = \psi_{ij}.$$

Условия положительности коэффициентов (2.4) ($A(x) > 0$, $B(x, \xi) > 0$, $D(x) \geq 0$), при которых справедлив принцип максимума, будут выполнены, если правая часть исходного уравнения удовлетворяет условию

$$f'_u(x, u) \leq 0 \quad \text{для всех } x \in G \text{ и } u. \quad (5.4)$$

Теорема 5.1. При выполнении условия (5.4) для погрешности справедлива оценка

$$\|z\|_C \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\psi\|_C \left(\|z\|_C = \max_{x_{ij} \in \omega_h} |z_{ij}| \right).$$

▼ Доказательство. Рассмотрим функцию $\bar{z}(x) = K(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2)$ ($K = \text{const}$) удовлетворяющую уравнениям:

$$\Delta_h \bar{z} + f'_u(x, \bar{y}) \bar{z} = -\bar{F}, \quad x \in \omega_h; \quad \bar{z}(x) = \bar{\mu}(x) > 0, \quad x \in \gamma_h.$$

Здесь $\bar{F} = 4K - K f'_u(x, \bar{y})(l_1^2 + l_2^2 - x_1^2 - x_2^2) \geq 4K$. Положим $K = \frac{1}{4} \|\psi\|_C$, тогда $\bar{F}(x) \geq \|\psi\|_C \geq |F(x)|$, $x \in \omega_h$. Отсюда в силу теоремы сравнения для краевой задачи (см. следствие теоремы 2.4) получим

$$\|z\|_C \leq \|\bar{z}\|_C \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|\psi\|_C.$$

▲ Утверждение доказано.

Замечание. Полученная оценка означает второй порядок точности схемы для достаточно гладких решений исходной задачи.

5.3.3 Оценка среднеквадратичной нормы погрешности

В пространстве $H_h = \{y(x_{ij}); x_{ij} \in \Omega_h, y|_{\gamma_h} = 0\}$ со скалярным произведением и нормой:

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}; \quad y, v \in H_h;$$

введем линейные операторы $A: H_h \rightarrow H_h$ и $R: H_h \rightarrow H_h$:

$$\begin{aligned} Ay_{ij} &= -\Delta_h y_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y|_{\gamma_h} = 0; \\ Ry_{ij} &= r_{ij} y_{ij}, \quad r_{ij} = -f'_u(x_{ij}, \bar{y}_{ij}), \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad y|_{\gamma_h} = 0. \end{aligned}$$

Тогда линеаризованное уравнение для погрешности (5.3) можно записать в виде операторного уравнения $(A + R)z = \psi$. Заметим, что операторы A и R являются самосопряженными.

Теорема 5.2. Пусть существует число $\varepsilon > 0$ такое, что неравенство $f'_u(x, u) \leq \delta - \varepsilon$ выполняется для всех $x \in G$ и u , где $\delta = 9/l_1^2 + 9/l_2^2$. Тогда для погрешности z справедлива оценка $\|z\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\psi\|$.

▼ Доказательство. Ранее показано (см. пункт 3.1.1), что $(Ay, y) \geq \delta \|y\|^2$, где $\delta = 9/l_1^2 + 9/l_2^2$, для любых $y \in H$. По условию теоремы

$$(Ry, y) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} r_{ij} y_{ij}^2 h_1 h_2 \geq (\varepsilon - \delta) \|y\|^2 \Rightarrow ((A + R)y, y) \geq \varepsilon \|y\|^2.$$

Отсюда, учитывая что $(A + R)z = \psi$, получим

$$\varepsilon \|z\|^2 \leq ((A + R)z, z) = (\psi, z) \leq \|\psi\| \|z\|,$$

откуда и следует требуемая оценка.

▲ Утверждение доказано.

5.4 Итерационный метод Ньютона

Далее рассмотрим итерационный метод решения системы нелинейных уравнений разностной схемы (5.2):

$$\begin{cases} \Delta_h y_{ij} = -f(x_{ij}, y_{ij}), & x_{ij} \in \omega_h; \\ y_{ij} = \mu(x_{ij}), & x_{ij} \in \gamma_h. \end{cases}$$

Будем использовать обозначения: $y = (y_{ij})$ — вектор с компонентами y_{ij} , $f(y) = (f(x_{ij}, y_{ij}))$, $f'(y) = (f'_u(x_{ij}, y_{ij}))$, $A = -\Delta_h$, n — номер итерации, $y_n = (y_{ij}^{(n)})$ — приближение, полученное на n -ой итерации.

В операторной форме записи разностная схема примет вид $Ay = f(y)$. Для построения итерационного метода решения системы (5.2) подставим в это уравнение y_{n+1} вместо y , после чего заменим правую часть следующим выражением:

$$Ay_{n+1} = f(y_{n+1}) \approx f(y_n) + f'(y_n)(y_{n+1} - y_n).$$

Такой прием, называемый *линеаризацией по Ньютону*, приводит к линейному относительно y_{n+1} операторному уравнению

$$Ay_{n+1} - f'(y_n)y_{n+1} = f(y_n) - f'(y_n)y_n,$$

определяющему итерационный метод, который называют *методом Ньютона*.

Для практической реализации метода Ньютона удобно ввести сеточную функцию v_n , определяемую равенством $y_{n+1} = y_n + v_{n+1}$, называемую *поправкой*. Подставляя такое представление y_{n+1} в уравнение итерационного метода, получим

$$Av_{n+1} - f'(y_n)v_{n+1} = -r_n, \quad r_n = Ay_n - f(y_n).$$

Функция r_n называется *невязкой* и в какой-то степени характеризует погрешность приближенного решения на n -ой итерации. В индексной форме записи итерационный метод Ньютона решения системы (5.2) примет вид

$$\begin{aligned} -\Delta_h v_{ij}^{(n+1)} - f'_u(x_{ij}, y_{ij}^{(n)})v_{ij}^{(n+1)} &= -r_{ij}^{(n)}, \quad x_{ij} \in \omega_h; \quad v_{ij}^{(n+1)}|_{\gamma_h} = 0; \\ r_{ij}^{(n)} &= -\Delta_h y_{ij}^{(n)} - f(x_{ij}, y_{ij}^{(n)}); \\ y_{ij}^{(n+1)} &= y_{ij}^{(n)} + v_{ij}^{(n+1)}; \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Здесь начальное приближение $y_{ij}^{(0)}$, $x_{ij} \in \Omega_h$ считается заданным. Предполагается, что $y_{ij}^{(n)}|_{\gamma_h} = \mu(x_{ij})$, $n = 0, 1, \dots$, откуда следует нулевое граничное условие для поправки.

Замечание. Для вычисления $v^{(n+1)}$ в свою очередь применяется какой-либо численный метод решения линейных систем двумерных разностных уравнений (см. главу 3), чаще итерационный. В этом случае имеем двухступенчатый итерационный процесс, состоящий из внешних итераций (ньютоновские итерации по нелинейности) и внутренних итераций (решение систем линейных алгебраических уравнений).

Далее исследуем сходимость итерационного метода Ньютона. Рассмотрим погрешность $w_n = y_n - y$ приближенного решения на n -ой итерации. Здесь y — точное решение нелинейной разностной задачи (5.2). Подставляя $y_{n+1} = w_{n+1} + y$ и $y_n = w_n + y$ в уравнение итерационного метода Ньютона

$$Ay_{n+1} - f'(y_n)y_{n+1} = f(y_n) - f'(y_n)y_n,$$

приходим к уравнению для погрешности

$$Aw_{n+1} - f'(y_n)w_{n+1} + Ay = f(y_n) - f'(y_n)w_n.$$

Отсюда, учитывая, что $Ay = f(y)$, $Rw_{n+1} = -f'(y_n)w_{n+1}$ (см. пункт 5.3.3), получим

$$(A + R)w_{n+1} + (f(y) - f(y_n)) + f'(y_n)w_n = 0.$$

С учетом разложения по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} f(y) - f(y_n) &= f'(y_n)(y - y_n) + 0,5f''(\tilde{y}_n)(y - y_n)^2 = \\ &= -f'(y_n)w_n + 0,5f''(\tilde{y}_n)w_n^2, \end{aligned}$$

(здесь, как и ранее, подразумеваются покомпонентные равенства) уравнение можно переписать в виде

$$(A + R)w_{n+1} = F_n, \quad F_n = -0,5f''(\tilde{y}_n)w_n^2.$$

Заметим, что полученное уравнение отличается от линеаризованного уравнения для погрешности (5.3) $(A + R)z = \psi$ лишь обозначениями и выражением для правой части. Поэтому при условии (5.4) $(f'_u(x, u) \leq 0$ для всех $x \in G$ и u) в силу теоремы 5.1 справедлива оценка

$$\|w_{n+1}\|_C \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{4} \|F_n\|_C \Rightarrow \|w_{n+1}\|_C \leq q \|w_n\|_C^2, \quad q = \frac{\|f''\|_C (l_1^2 + l_2^2)}{8}.$$

Последнее неравенство означает *квадратичную скорость сходимости* итерационного метода Ньютона при условии соответствующего выбора начального приближения. Найдем это условие. Обозначая $p_n = q \|w_n\|_C$, приходим к неравенствам

$$p_{n+1} \leq p_n^2 \Rightarrow p_n \leq p_0^{2^n} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

откуда вытекает, что для сходимости достаточно выполнения неравенства $p_0 < 1$. Отсюда получим условие выбора начального приближения

$$\|y^0 - y\|_C < \frac{1}{q}, \quad q = \frac{\|f''\|_C (l_1^2 + l_2^2)}{8}.$$

Таким образом, метод Ньютона сходится, и притом сходится квадратично, если начальное приближение достаточно близко к точному решению.

5.5 Задачи к главе 5

Задача 5.1. Используя принцип замороженных коэффициентов, исследовать устойчивость по начальным данным разностной схемы

$$y_{n,i}^n = (ay_x^n)_{x,i}, \quad a_i = 1 + 0,5(x_i^2 + x_{i-1}^2), \quad 0 < x_i < 1.$$

Замечание. Здесь и в последующих примерах, где это не вызывает недоумений, полная постановка разностной задачи не приводится.

Ответ: Схема устойчива при $\tau \leq h/\sqrt{2}$.

Задача 5.2. Для задачи

$$(k(x)u')' = -f(u), \quad 0 < x < 1; \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2;$$

где $k(x) \geq c_1 > 0$, $f'(u) \leq 0$, построить схему второго порядка аппроксимации и указать метод решения разностных уравнений.

Ответ: Второй порядок аппроксимации имеет, например, следующая схема

$$(ay_x)_{x,i} = -f(y_i), \quad a_i = k(x_i - 0,5h); \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2.$$

Для решения этой нелинейной системы уравнений можно использовать итерационный метод

$$(ay_{\bar{x}}^{(s+1)})_{x,i} = -f(y_i^{(s)}); \quad s = 0, 1, \dots; \quad y_0^{(s+1)} = \mu_1, \quad y_N^{(s+1)} = \mu_2.$$

Значения $y_i^{(s+1)}$ на новой итерации находятся методом прогонки.

Задача 5.3. Для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (\sigma > 0);$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

построить неявную разностную схему второго порядка аппроксимации и указать метод решения разностных уравнений.

Ответ: Второй порядок аппроксимации имеет, например, симметричная схема:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left((a(y_i^{n+1})y_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i} + (a(y_i^n)y_{\bar{x}}^n)_{x,i} \right); \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0; \quad y_i^0 = u_0(x_i); \quad a(y_i) = 0,5(y_{i-1}^\sigma + y_i^\sigma).$$

Для нахождения y_i^{n+1} можно использовать итерационный метод

$$\frac{y_i^{(s+1)} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left((a(y_i^{(s)})y_{\bar{x}}^{(s+1)})_{x,i} + (a(y_i^n)y_{\bar{x}}^n)_{x,i} \right); \quad y_0^{(s+1)} = y_N^{(s+1)} = 0;$$

$$y_i^{(0)} = y_i^n; \quad s = 0, 1, \dots, M-1; \quad y_i^{n+1} = y_i^{(M)}.$$

Значения $y_i^{(s+1)}$ при $i = 1, 2, \dots, N-1$ находятся методом прогонки.

Задача 5.4. Выписать схему предиктор–корректор второго порядка для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + u^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Ответ:

$$\frac{y_i^{n+1/2} - y_i^n}{0,5\tau} = (a(y_i^n)y_{\bar{x}}^{n+1/2})_{x,i}, \quad a(y_i^n) = 1 + \frac{(y_{i-1}^n)^2 + (y_i^n)^2}{2},$$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left((a(y_i^{n+1/2})y_{\bar{x}}^{n+1})_{x,i} + (a(y_i^{n+1/2})y_{\bar{x}}^n)_{x,i} \right).$$

Задача 5.5. Построить однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации для задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left((1+x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha x^3, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (\alpha = \text{const});$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x(1-x).$$

Указать метод решения полученных разностных уравнений.

Ответ: Второй порядок аппроксимации имеют разностные схемы

$$y_{i,t,i}^n = \sigma \Lambda y_i^{n+1} + (1-2\sigma) \Lambda y_i^n + \sigma \Lambda y_i^{n-1} + \alpha x_i^3; \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0; \quad y_i^0 = 0, \quad y_i^1 = \tau(x_i(1-x_i) + 0,5\tau\alpha x_i^3); \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\Lambda y_i^n = (a y_{\bar{x}}^n)_{x,i} = \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h} - a_i \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} \right), \quad a_i = 1 + \frac{x_{i-1}^2 + x_i^2}{2}.$$

Значения y_i^{n+1} находятся методом прогонки.

Задача 5.6. Построить итерационный метод Ньютона для решения нелинейной разностной задачи

$$y_{\bar{x}x,i} = -f(x_i, y_i); \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad y_0 = y_N = 0.$$

Ответ:

$$(y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)}) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i^{(n)}) + y_{\bar{x}x,i}^{(n+1)} = -f(x_i, y_i^{(n)}); \quad y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0.$$

Задача 5.7. Для разностной схемы

$$(1 + y_i) y_{\bar{x}x,i} + 1 = 0; \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad hN = 1; \quad y_0 = y_N = 0;$$

построить итерационный метод Ньютона.

Ответ:

$$\frac{y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)}}{1 + y_i^{(n)}} = (1 + y_i^{(n)}) y_{\bar{x}x,i}^{(n+1)} + 1; \quad y_0^{(n+1)} = y_N^{(n+1)} = 0.$$

Задача 5.8. Построить итерационный метод Ньютона для отыскания корня системы уравнений

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Ответ:

$$D(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}) + f(x^{(n)}) = 0,$$

где $x^{(n)} = (x_1^{(n)} \ x_2^{(n)})^T$, $f = (f_1 \ f_2)^T$, D — матрица якобиана $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}$.

Предметный указатель

- Автомодельное решение, 140
- Базисные функции, 10
- Быстрое дискретное преобразование Фурье, 93
- Внутренний узел, 34
- Граничный узел, 34
- Двуслойная разностная схема, 117
- Достаточное условие неустойчивости, 43
- Интегро-интерполяционный метод, 143
- Искусственная вязкость, 47
- Итерационные методы
 - градиентные, 83
 - сопряженных направлений, 89
- Итерационные параметры, 60
- Итерационный метод
 - k -шаговый, 60
 - двухшаговый, 60
 - линейный, 60
 - минимальных невязок, 87
 - минимальных погрешностей, 88
 - минимальных поправок, 87
 - невный, 61
 - одношаговый, 60
 - скорейшего спуска, 85
 - сопряженных градиентов, 90
 - сопряженных невязок, 90
 - сопряженных погрешностей, 91
 - сопряженных поправок, 91
 - стационарный, 60
 - стационарный одношаговый, 61
 - сходимость, 61
 - сходимость со скоростью геометрической прогрессии, 62
 - явный, 61
- Канонический вид
 - двуслойной схемы, 118
 - одношагового итерационного метода, 61
 - разностной схемы, 34
 - трехслойной схемы, 126
- Квадратичная скорость сходимости, 152
- Квадратный корень матрицы, 64
- Квазилинейное уравнение теплопроводности, 140
- Классическое решение, 14
- Конечноэлементный базис, 13
- Консервативные схемы, 144
- Корректность разностной схемы, 113
- Кусочно-линейное восполнение, 10, 26
- Линеаризация по Ньютону, 150
- Линеаризованное уравнение для погрешности, 148
- Локальная минимизация, 82
- Метод Ньютона, 150
- Метод баланса, 143
- Метод гармоник, 43
- Метод матричной прогонки, 95
- Метод простой итерации, 68
- Методы переменных направлений, 131

- Многочлен Чебышева, 79
 Модельная задача, 59
 Монотонизатор, 48
 Монотонная схема, 37
 Невязка, 83, 151
 Нелинейные разностные уравнения, 148
 Немонотонная схема, 37
 Необходимое условие устойчивости, 43
 Носитель функции, 24
 Обобщенное решение, 14, 17, 23
 Окрестность узла, 34
 Оператор левой разностной производной, 116
 Оператор правой разностной производной, 116
 Операторная норма, 66
 Оптимальный итерационный параметр, 68
 Первая краевая задача, 38
 Подчиненная норма матрицы, 99
 Поправка, 83, 150
 Приближенное решение, 14, 17, 27
 Принцип замороженных коэффициентов, 45, 145
 Продольно–поперечная разностная схема, 132
 Пространство Соболева, 14, 22, 23
 Пятиточечный разностный оператор Лапласа, 53
 Разностная сетка, 34
 Решение типа бегущей волны, 140
 Связная сетка, 34
 Скорость сходимости итерационного метода, 62
 Сопряженные векторы, 89
 Суммарная аппроксимация, 135, 136
 Схема с весами, 119
 Схема с направленными разностями, 49
 Температурная волна, 141
 Трехслойная разностная схема, 125
 Триангуляция, 24
 Условие устойчивости по начальным данным, 43
 Условия положительности коэффициентов, 35
 Устойчивость двухслойной схемы, 119 по начальным данным, 120 по правой части, 120 равномерная, 120
 Устойчивость метода прогонки, 99
 Устойчивость разностной схемы, 113
 Финитные функции, 13
 Фронт температурной волны, 141
 Функции с конечным носителем, 13
 Число итераций для достижения точности ϵ , 62
 Шаблон, 34
 Элементы, 13
 Энергетическая норма, 66

Литература

- [1] Самарский А.А. Теория разностных схем. – 3-е изд. — М.: Наука, 1989.
- [2] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. — М.: Научный мир, 2000.
- [3] Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. — М.: МАКС Пресс, 2010.
- [4] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.
- [5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. – 4-е изд. — М.: Наука. Физматлит, 1999.
- [6] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – 3-е изд. — М.: Наука, 1989.
- [7] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
- [8] Peaceman D.W., Rachford H.H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. — J. SIAM, V.3, №1, 1955, PP.28–41.
- [9] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – 6-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999.
- [10] Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики с учетом теплопроводности. — М.: Изд-во МФТИ, 1996.